

**SIMULACIÓN DEL FLUJO TURBULENTO EN UN CODO DE 90°
DE TUBERIA DE SECCIÓN CIRCULAR**

MANUEL ALEJANDRO TABORDA CEBALLOS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE ENERGETICA Y MECANICA
PROGRAMA DE INGENIERIA MECANICA
SANTIAGO DE CALI
2012**

**SIMULACIÓN DEL FLUJO TURBULENTO EN UN CODO DE 90°
DE TUBERIA DE SECCIÓN CIRCULAR**

MANUEL ALEJANDRO TABORDA CEBALLOS

**Proyecto de Grado para optar el título de
Ingeniero Mecánico**

**Director
SANTIAGO LAÍN BEATOVE
Doctor en Ciencias Físicas
Doctor Ingeniero Habilitado**

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE ENERGETICA Y MECANICA
PROGRAMA DE INGENIERIA MECANICA
SANTIAGO DE CALI
2012**

Nota de aceptación:

Aprobado por el Comité de Grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad Autónoma de Occidente para optar al título de Ingeniero Mecánico.

Ing. BRIAN QUINTERO ARBOLEDA
Jurado

Ing. MAURICIO BARRERA
Jurado

Santiago de Cali, 23 mayo 2012

A mis familiares

Es muy grato el saber que esta etapa de mi vida ya culmina, en la cual he pasado por muchas emociones, en donde mis padres siempre estuvieron presentes para apoyarme, y ayudarme en cada momento; es ahora el tiempo de ver el fruto de años de estudio, y poder decirles que han formado una persona que está dispuesta a seguir adelante en cualquier circunstancia.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente quiero darle gracias a Dios por permitirme terminar con esta etapa de mi vida, se que Él en cada momento me da su apoyo.

Agradecer en gran manera al Doctor y Profesor Santiago Laín Beatove por su gran colaboración y motivación en el momento de realizar este trabajo, se que muchas generaciones podrán aprender de su gran conocimiento.

A mis padres que siempre con su apoyo lograron que me pudiera convertir en Ingeniero, a mi mama María Dalila Ceballos que con sus ganas de verme triunfar me brindaba su ánimo y alegría, a mi papa Harbey Taborda que con su ejemplo logro que yo entendiera que se puede alcanzar y superar todo lo que se desea en la vida, a mi novia Yurani Sandoval, que con su gran apoyo en todo momento, me ayudó a terminar con este trabajo.

CONTENIDO

RESUMEN	Pág. 13
INTRODUCCION	14
1. ANTECEDENTES	18
2. OBJETIVOS	20
2.1 OBJETIVO GENERAL	20
2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS	20
3. MARCO TEORICO	21
3.1 ECUACIONES PROMEDIADAS DE REYNOLDS	22
3.2 ECUACIONES DE FLUJO MEDIO	23
3.3 Solución Numérica Directa (DNS)	24
3.4 Modelo de simulación de grandes escalas (LES)	24
3.4.1 Filtrado.	26
3.4.2 Ecuaciones de evolución de las grandes escalas	28
3.4.3 Modelos de interacción tipo Eddy Viscosity	31
3.4.4 Modelo de Smagorinsky	32
3.5 Ecuaciones de flujo	33
3.5.1 Corrección de presión	33
4. SIMULACION	35
4.1 Metodología de aplicación de un modelo de dinámica de fluidos computacional (CFD)	35
4.1.1 Pre-procesamiento:	35
4.1.2 Solver:	35
4.1.3 Postprocesamiento:	36
4.2 Dominio computacional	36
4.3 Condiciones de frontera	36

4.4	Generación de la malla	38
4.5	Discretización	40
4.6	RESULTADOS Y ANALISIS	40
4.6.1	Simulación con el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$	40
4.6.2	Simulación con el modelo de turbulencia <i>RSM</i> (Reynolds Stress Model)	48
4.6.3	Simulación con el modelo de turbulencia <i>LES</i> (Simulación de grandes escalas)	54
4.6.4	Comparación de resultados	60
5.	CONCLUSIONES	73
	BIBLIOGRAFIA	75

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo $k - \varepsilon$, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error	61
Tabla 2. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo RSM, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error	62
Tabla 3. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo LES, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error	62
Tabla 4. Datos de energía cinética turbulenta obtenidos de los modelos, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error.	71
Tabla 5. Datos de flujo secundario obtenidos de los modelos, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error.	72

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Características del campo de velocidad filtrado	27
Figura 2. Dimensiones del dominio computacional	37
Figura 3. Modelo geométrico del dominio	37
Figura 4. Perfil de velocidades a la entrada de la tubería	38
Figura 5. Enmallado total del dominio	38
Figura 6. Detalle de la malla sobre la cara de entrada	39
Figura 7. Calidad de la malla	39
Figura 8. O-grid de la sección transversal	40
Figura 9. Contornos de coeficiente de presión en el plano $z = 0$ para el modelo $k - \varepsilon$	41
Figura 10. Planos del dominio	42
Figura 11. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo $k - \varepsilon$	42
Figura 12. Contornos de Velocidad en el plano $z = 0$ para el modelo $k - \varepsilon$	43
Figura 13. Contornos de velocidad para diferentes planos sobre el dominio	43
Figura 14. Contornos de intensidad turbulenta en el plano $z = 0$, para $k - \varepsilon$	45
Figura 15. Contornos de intensidad turbulenta para diferentes planos en el dominio	46
Figura 16. Energía cinética turbulenta para diferentes planos del modelo $k - \varepsilon$.	47
Figura 17. Intensidad de flujo secundario para diferentes planos sobre el dominio	48

Figura 18 .Contornos de coeficiente de presión en plano $z = 0$, para el modelo RSM	49
Figura 19 . Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo RSM	49
Figura 20. Contornos de Velocidad en el plano $z = 0$, para el modelo RSM	50
Figura 21. Contornos de velocidad sobre todo el dominio, para el modelo RSM	50
Figura 22. Contornos de intensidad turbulenta en el plano $z = 0$, para el RSM	51
Figura 23. Contornos de intensidad turbulenta en diferentes planos, para el RSM	52
Figura 24. Energía cinética turbulenta para diferentes planos para el modelo RSM	53
Figura 25. Intensidad de flujo secundario para diferentes plano para el modelo RSM	54
Figura 26. Velocidad instantánea sobre el plano medio $z = 0$	55
Figura 27. Velocidad instantánea sobre un plano a 45°.	55
Figura 28. Contornos de coeficiente de presión media en plano $z = 0$, para el modelo LES	56
Figura 29. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo LES	56
Figura 30. Contornos de velocidad media en plano $z = 0$, para el modelo LES	57
Figura 31. Contornos de velocidad media sobre diferentes planos del dominio, para el modelo LES	58
Figura 32. Energía cinética turbulenta en diferentes planos para el modelo LES	59

Figura 33. Intensidad de flujo secundario para diferentes planos sobre el dominio, para el modelo LES	60
Figura 34. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para los tres modelos computacionales, con los datos experimentales de Sudo et al.	61
Figura 35. Diferentes contornos de velocidad media normalizados.	63
Figura 36. Vectores de velocidad de flujo secundario.	66
Figura 37. Intensidad Turbulenta mostrando los datos experimentales	68
Figura 38. Energía turbulenta, con los tres modelos tratados y los datos experimentales de Sudo	70
Figura 39. Intensidad del flujo secundario, con los tres modelos tratados y los datos experimentales de Sudo	71

GLOSARIO

BACKSCATTER: transferencia de energía de las pequeñas escalas a las grandes escalas

CASCADA DE ENERGIA: proceso de intercambio de energía de las grandes escalas a las pequeñas escalas.

CFD: Computational Fluid Dynamics (Dinámica Computacional de Fluidos)

CONVERGENCIA: asociación con un requerimiento de un nivel de precisión en particular de cada solución.

DISCRETIZACION: partición en un numero finito de elementos, ya sea del dominio o de ecuaciones.

DNS: Direct Numerical Simulations (Simulación numérica directa)

ESTADO TRANSITORIO: características de un sistema que varían con el tiempo.

FLUJO INCOMPRESIBLE: flujo cuya densidad no varia con el tiempo

IDEMPOTENCIA: propiedad de aplicar una operación matemática sobre un elemento y aun así obtener el mismo resultado.

INTENSIDAD TURBULENTA: describe el nivel de turbulencia en un proceso.

LES: Large Eddy Simulation (simulación de grandes escalas)

MALLADO ESTRUCTURADO: cada punto del mallado se identifica de manera exclusiva con los índices i, j, k del sistema de coordenadas cartesianas. Las celdas serán hexaedros en el caso de 3D.

RANS: Reynolds Averaged Navier Stokes

Re: numero de Reynolds $Re = \rho v D / \mu$

RSM: Reynolds Stress Model (Modelo de los esfuerzos de Reynolds)

VISCOSIDAD: medida cuantitativa de la resistencia de un fluido a fluir, determina la velocidad de deformación del fluido cuando se aplica un esfuerzo cortante dado

Δ : ancho de filtro

ε : tasa de disipación de energía

η : microescala de Kolmogorov

C_{ij} : tensor de esfuerzos Cruzados

C_s : constante de Smagorinsky

L_{ij} : tensor de esfuerzos de Leonard

R_{ij} : tensor de esfuerzos de subescala

S_{ij} : tensor de velocidad de deformación

y^+ : distancia adimensional de la pared $y^+ = u^* y / \nu$.

δ_{ij} : delta de Kronecker.

RESUMEN

Este trabajo de grado se centra en la simulación del flujo turbulento en un codo de 90°. Esta simulación se basa en 3 tipos de modelos de turbulencia, dos modelos clásicos, basados en el promedio temporal de las ecuaciones de Reynolds, $k - \varepsilon$ y Modelo de los Esfuerzos de Reynolds (RANS, por sus siglas en inglés), en estado estacionario; y un modelo de simulación de grandes escalas (LES, por sus siglas en inglés), en estado transitorio, basado en las ecuaciones filtradas en el espacio. Las simulaciones se realizaron en el paquete comercial CFD, ANSYS – Fluent; con la ayuda de este paquete se visualizan las estructuras turbulentas que se desarrollan en el interior del codo y algunos parámetros de flujo como los contornos de velocidad, intensidad turbulenta, y adicionalmente la intensidad del flujo secundario.

Estas simulaciones se comparan con los resultados obtenidos con datos experimentales proporcionados por otros autores. En este caso se propusieron como prueba de validación los resultados experimentales de Sudo et al. (1998), los cuales proporcionan suficiente información sobre el campo de velocidades y presiones en el codo así como intensidades de flujo secundario y fluctuaciones turbulentas.

En general, los resultados obtenidos con los tres modelos de turbulencia son similares entre sí y comparan razonablemente bien con las medidas experimentales. Sin embargo, se evidencia que las simulaciones transitorias bajo LES deben extenderse más tiempo con el objeto de proporcionar una mejor estadística temporal de las variables que describen el flujo.

Palabras Claves: LES, simulación, RANS, flujo secundario, Ecuaciones de flujo, velocidad instantánea, tubería curva.

INTRODUCCION

El flujo en tuberías curvas ocurre en varios dispositivos de ingeniería, tales como sistemas de tuberías de plantas industriales, turbomaquinaria e intercambiadores de calor, procesos de producción tanto de grandes como cortas distancias. Una aplicación particular en la cual el Grupo de Investigación de Mecánica de Fluidos de la UAO está interesado es la del transporte neumático de partículas sólidas en un flujo turbulento de aire. Fundamental para el diseño de este tipo de sistemas es la determinación de la caída de presión como una función de la velocidad superficial del gas, la cual está compuesta por la caída de presión de la fase gaseosa, bastante conocida en los diferentes elementos de tubería, y la caída de presión adicional debida al transporte de las partículas. La pérdida de presión en flujo estacionario monofásico depende del coeficiente de fricción de las paredes, por lo tanto de la rugosidad relativa de la pared y del número de Reynolds del flujo. Para el sistema de tuberías completo se debe añadir la contribución de los diferentes elementos (ej. Codos, válvulas, tuberías rectas, y/o estrechamientos) cuya misión es bifurcar, cambiar la dirección o regular de alguna forma el flujo. La pérdida de carga adicional debido a las partículas depende de muchos factores entre los que se pueden destacar el diámetro de la tubería y su material, rugosidad de las paredes, tamaño y forma de las partículas, y fracción de carga másica (kg partículas / kg aire). Como resultado de esta complejidad el diseño de los sistemas de transporte neumático es fundamentalmente empírico.

Con el objeto de estudiar la relevancia de los diferentes fenómenos físicos enunciados en el problema del transporte de partículas sólidas en flujos turbulentos, el grupo de investigación en Mecánica de Fluidos ha desarrollado varios proyectos en el marco del análisis numérico de este tipo de flujos, desde una aproximación estacionaria. Sin embargo, dado que las partículas responden a las estructuras de flujo instantáneas en lugar de las promediadas temporalmente, recientemente se ha evidenciado la necesidad de realizar simulaciones del flujo en estado transitorio como la única aproximación válida para describir las fluctuaciones de concentración de partículas observadas experimentalmente en elementos de tubería tales como codos.

En este contexto, se enmarca la presente tesis de grado, donde se aborda el problema de la descripción transitoria del flujo monofásico de aire que tiene lugar en un codo de tubería de 90° como paso previo a un estudio bifásico que contemple la simulación del transporte de las partículas en el codo referido. Además de la simulación transitoria bajo el esquema de Simulación de Grandes Escalas (LES, por sus siglas en inglés), se ha contemplado la simulación estacionaria del flujo con dos modelos clásicos de turbulencia, uno de dos

ecuaciones ($k-\varepsilon$) y otro de siete ecuaciones (modelo de esfuerzos de Reynolds o RSM por sus siglas en inglés).

Tradicionalmente se separa el estudio de las pérdidas de carga en conductos rectos de las pérdidas que se producen en los accesorios, denominadas pérdidas singulares o locales (o en ocasiones pérdidas menores). Las primeras son debidas a la fricción y cobran importancia cuando las longitudes de los conductos son considerables. Las segundas por el contrario se producen en una longitud relativamente corta en relación a las asociadas con las pérdidas por fricción y se deben a que el flujo en el interior de los accesorios es tridimensional y complejo produciéndose una gran disipación de energía para que el flujo vuelva de nuevo a la condición de desarrollado aguas abajo. Por tal razón se les conoce como pérdidas de forma. El estudio de las pérdidas de carga por fricción del flujo completamente desarrollado en conductos es muy completo, sobre todo gracias a los trabajos de Prandtl, Nikuradse, Moody, entre otros. Por otro lado, para las pérdidas de carga singulares no existen unos resultados de validez general, así como de la influencia de otros elementos próximos al estudiado, debido principalmente a los flujos tan complejos y diferentes que se producen en el interior de los codos; son pocos los resultados que tienen alguna base puramente teórica, por el contrario existe una gran cantidad de datos experimentales proporcionados por investigadores.

En la literatura proporcionada por las diferentes investigaciones se encuentra que cuando un fluido fluye a través de un accesorio tal como un codo de cualquier sección transversal, se observa que un flujo secundario se produce en planos perpendiculares al eje central de la curva de la tubería. La explicación teórica de este flujo secundario se dio por primera vez por J. Thompson¹, quien planteó que tiene que haber un gradiente de presión a través de la tubería para equilibrar la fuerza centrífuga en el fluido debido a su trayectoria curva, siendo la presión mayor en pared exterior de la tubería y menor en la pared interior. El fluido cerca de la parte superior e inferior de la tubería se mueve más lentamente que del plano central debido a la viscosidad y por lo tanto requiere un gradiente de presión menor para equilibrar la reducción de la fuerza centrífuga.

En consecuencia se produce un flujo secundario en el cual el fluido cerca de las paredes superior e inferior de la tubería se mueve hacia adentro, hacia el centro de curvatura del eje central y el fluido cerca del plano medio hacia el exterior; esto a su vez modifica la velocidad axial. El fluido más rápido se mueve cerca del plano central, empuja el líquido en la capa límite hacia la pared exterior de las paredes superior e inferior, y luego hacia el interior a lo largo de las paredes superior e

¹ Proc. Roy Soc. A, Vol 25, pp. 5 to 8,356 and 357

inferior (donde es retrasado debido a su proximidad a estas paredes) hacia la pared interior; el fluido de movimiento rápido es por tanto, constantemente llevado a la pared exterior y el fluido lento hacia la pared interior. La acumulación de la capa lenta de la pared interior resulta en una disminución del flujo a través de la tubería.

Las investigaciones experimentales del flujo secundario fueron hechas por Eustace², White³ y Taylor⁴, y el primer análisis teórico dado por Deán⁵ para el caso de un fluido incompresible en movimiento estacionario a través de un tubo de sección circular, cuyo eje se dobla en forma de un arco circular de varias revoluciones. Deán desarrollo la velocidad y la presión en una serie de potencias de la curvatura del eje de la tubería y obtuvo la solución en función de la cuarta potencia de este parámetro. Su análisis se limita al caso de flujo totalmente desarrollado en la curva de tubería.

En general, los problemas que implican este flujo de fluidos son descritos matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones no lineales en derivadas parciales (Ecuaciones de Navier-Stokes) los cuales resuelven bajo las condiciones iniciales y condiciones de frontera específicos el problema en particular. Sin embargo, muy pocos problemas de mecánica de fluidos pueden ser resueltos por métodos analíticos convencionales por lo que se debe recurrir a una solución numérica de las ecuaciones. En teoría, es posible resolver numéricamente todos los detalles de un flujo de fluidos incluyendo las rápidas variaciones espaciales y temporales de la turbulencia utilizando CFD, este es el caso de DNS (simulación directa), desafortunadamente la simulación directa para los flujos turbulentos prácticos, es aún muy difícil de alcanzar debido a las capacidades computacionales ya que el costo computacional es proporcional a la tercera potencia del numero de Reynolds del flujo, es por esto que las ecuaciones estadísticamente promediadas son una buena alternativa para la descripción del campo medio de la velocidad. Pero más allá de estas ecuaciones promediadas, hay un modelo en el cual las grandes escalas se separan de las pequeñas escalas y es posible conocer el campo instantáneo de velocidades, este modelo es conocido como Simulación de grandes escalas (LES) en el cual ha servido de base para muchos estudios en los flujos turbulentos y constituye un camino intermedio entre la DNS y los modelos de turbulencia tradicionales.

² Experiments on streamline motion in curved pipes. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 85, pp. 122 fl. 1911.

³ Streamline flow through curved pipes. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 123, pp. 645 to 663. 1929.

⁴ The criterion for turbulence in curved pipes. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 124, pp. 243 to 249. 1929.

⁵ Streamline motion of fluid in curved pipes. Phil. Mag. (7), Vol. 4, pp. 208 ff. 1927.

La presente tesis de grado aborda el problema de la descripción transitoria del flujo monofásico de aire que tiene lugar en un codo de tubería de 90° bajo el esquema de Simulación de Grandes Escalas (LES, por sus siglas en inglés). Además, se realizó la simulación estacionaria del flujo con dos modelos clásicos de turbulencia, uno de dos ecuaciones ($k-\varepsilon$) y otro de siete ecuaciones (modelo de esfuerzos de Reynolds o RSM por sus siglas en inglés). Los resultados se validan frente a las medidas experimentales de Sudo et al. (1998).

1. ANTECEDENTES

La mecánica de fluidos corresponde a un enfoque especial para estudiar el comportamiento de los líquidos y los gases. Los principios básicos del movimiento de los fluidos se desarrollaron lentamente a través de los siglos XVI al XIX como resultado del trabajo de muchos científicos como Da Vinci, Galileo, Torricelli, Pascal, Bernoulli, Euler, Navier, Stokes, Kelvin, Reynolds.

La Mecánica de Fluidos moderna aparece a principios del siglo XX como un esfuerzo para unir las tendencias: experimental y científica. Generalmente se reconoce como fundador de la mecánica de fluidos al alemán L. Prandtl (1875-1953). Esta es una ciencia relativamente moderna a la cual aún hoy se están haciendo importantes contribuciones. Desde los años 90 el uso de la mecánica computacional de fluidos (CFD) se ha expandido de forma significativa a distintas aplicaciones y procesos industriales en los que interviene transferencia de calor, reacciones químicas (como combustión), flujos bifásicos, cambios de fase, transferencia de masa, entre otros. Actualmente el uso de esta herramienta ha cambiado radicalmente. Ha pasado de ser empleado solo a nivel de investigación a ser utilizado como una potente herramienta en problemas aplicados a la industria.

Los trabajos más relevantes que preceden al estudio presentado en este documento se mencionan a continuación.

K. Sudo, M. Sumida y H. Hibara, en el año 1998 realizaron una investigación experimental sobre el flujo turbulento en una circular de sección de 90° , denominado "*Experimental investigation on turbulent flow in a circular-sectioned 90-degree bend*". Los resultados numéricos obtenidos en este estudio se han comparado frente a sus medidas experimentales, las cuales incluyen tanto velocidades medias en diferentes secciones transversales a lo largo del codo como variables fluctuantes. Adicionalmente ofrecen resultados sobre la intensidad del flujo secundario que se desarrolla en el codo.

J. Pruvost, J. Legrand, y P. Legentilhomme publicaron en el 2004 un artículo denominado "*Numerical investigation of bend and torus flows, part I: effect of swirl motion on flow structure in U-bend*", el cual se realizó como un estudio preliminar para modelar flujos en reactores de forma toroidal, las simulaciones basadas en modelos clásicos de turbulencia se llevaron a cabo en geometrías estándar de codos de 90° y 180° . Después se realizó la validación de la estrategia numérica, un estudio paramétrico para comprender mejor las interacciones entre los vórtices

de Dean involucrados por la curvatura doble y el movimiento de rotación principal generada por el movimiento del vórtice.

M. Breuer, H.T. Baytekin y E.A. Matida realizaron un estudio en el 2006 denominado *“Prediction of aerosol deposition in 90° bends using LES and an efficient Lagrangian tracking method”*, el cual investigaba la administración de medicamentos en aerosol a través de la cavidad oral. Este estudio consistió en identificar la cantidad de medicamento que se perdía a través de la deposición en las paredes de la región extratorácica, lo que hacía menos efectivo el medicamento. Este es el único antecedente directo encontrado sobre simulaciones tipo LES en un codo, el cual simulaba el comienzo del tracto respiratorio.

S. Laín y M. Sommerfeld, en el año 2010, realizaron el análisis numérico de un sistema de transporte neumático en el artículo denominado *“Numerical analysis of a pneumatic Conveying system consisting of horizontal Pipe, 90°-bend and vertical pipe”*, quienes usaron en primer lugar el método de Euler/Lagrange y otros modelos para describir el comportamiento de la fase de partículas y las condiciones de flujo, así como las condiciones de contorno aplicadas para los cálculos. El cálculo del flujo se basaba en el modelo de turbulencia k- ϵ .

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

- Simular el flujo turbulento a través de un codo de 90° en una tubería de sección circular

2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Realizar la simulación estacionaria del flujo de aire en el codo con los modelos de turbulencia tipo RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) $k-\epsilon$ y Reynolds Stress.
- Validar los resultados frente a las medidas experimentales de Sudo et al. (1998).
- Realizar la simulación transitoria tipo LES y compararla frente a las medidas experimentales de Sudo et al. (1998) y los resultados RANS.

3. MARCO TEORICO

El movimiento de fluidos esta descrito por ecuaciones diferenciales que fueron desarrollados de forma independiente por C.L.M.H Navier y Sir George G. Stokes, de los cuales toman el nombre de ecuaciones de Navier-Stokes. Estas son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden, de los cuales se conocen un número limitado de soluciones analíticas. Estas ecuaciones se pueden resolver usando métodos numéricos para simular el comportamiento de los casos de interés práctico y obtener una solución. Este sistema de ecuaciones por ejemplo está representado para un fluido de densidad constante, en flujo estacionario siguiente forma:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j^2} + f_i \quad [2]$$

Donde U_i , p y $\nu = \mu/\rho$ son las componentes de velocidad ($i = 1, 2, 3$), la presión y la viscosidad cinemática, respectivamente, y f_i son las componentes de las fuerzas externas que actúan sobre el fluido.

El flujo turbulento es el más frecuente en las aplicaciones prácticas de la ingeniería. En esta clase de flujo las partículas se mueven siguiendo trayectorias muy irregulares, originando un intercambio de momento lineal de una porción de fluido a otra, de manera algo semejante al intercambio de momento molecular, pero a una escala mucho mayor.

El rango de escalas de un flujo turbulento está delimitado por las escalas macroscópicas que las condiciones concretas del sistema imponen (escalas integrales), en un extremo, y por las escalas disipativas en el otro, presentando éstas últimas un tamaño varios órdenes de magnitud menores que las macroscópicas. Por otro lado, los procesos disipativos son parte importante de la dinámica del sistema y sus efectos no pueden ser despreciados. Así, si L representa el tamaño de la escala integral del flujo, dada por las condiciones iniciales y de contorno y η es la microescala de Kolmogorov, que caracteriza la disipación viscosa de energía, para representar numéricamente la ecuación de evolución de momento lineal se precisa una discretización cuya distancia entre nodos sea del orden de η (para capturar las fluctuaciones de tamaño menor en las que la disipación viscosa tiene un efecto importante) y que sea capaz de representar tamaños del orden de L . Se precisaran al menos L/η nodos por dimensión, en total:

$$N^3 = \left(\frac{L}{\eta} \right)^3 \quad [3]$$

Las menores escalas del flujo, las escalas donde los efectos disipativos son importantes, quedan definidas por los parámetros que caracterizan la dinámica de pequeña escala: la viscosidad cinemática ν y la tasa de disipación de energía cinética por unidad de masa ε . Adecuadamente combinados definen la mencionada microescala de Kolmogorov:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad [4]$$

Otras combinaciones definen microescalas de tiempo y velocidad:

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad [5]$$

$$u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad [6]$$

3.1 ECUACIONES PROMEDIADAS DE REYNOLDS

En un flujo turbulento, debido a la fluctuación de la presión o velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes varía rápida y aleatoriamente en función de la posición y del tiempo. Por eso es necesario introducir algún tipo de descripción estadística de los flujos turbulentos.

Esta descripción la realizó Osborne Reynolds en 1895 al reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de las medias temporales de las diversas variables turbulentas. Desde entonces una rama de la mecánica de fluidos ha tratado sobre el modelado y solución de estas ecuaciones. La metodología se basa en la descomposición de las variables de flujo en su valor medio más una componente de fluctuación

$$U_i = \bar{U}_i + u'_i \quad [7]$$

$$p = \bar{p} + p' \quad [8]$$

Donde los valores medios se denotan con una barra sobre la variable y los turbulentos por la prima.

3.2 ECUACIONES DE FLUJO MEDIO

Las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes resultan en las siguientes ecuaciones, usando la definición de las variables promediadas.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad [9]$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad [10]$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma de las ecuaciones de Navier-Stokes, excepto por los términos de correlación entre fluctuaciones que representan la acción sobre el campo promedio que realiza la turbulencia. La correlación, $\overline{u'_i u'_j}$, se denomina esfuerzos de Reynolds. La existencia de los esfuerzos de Reynolds implica que se deben hacer suposiciones sobre su estructura para dar solución al problema turbulento

Los modelos RANS han sido desarrollados basados en el concepto de que la escala de velocidad y la escala de longitud son suficientes para describir el efecto de la turbulencia del flujo. En instancias iniciales el modelo de turbulencia utilizado era el modelo de viscosidad turbulenta el cual realiza una estimación de las escalas de velocidad y longitud de flujo por medio de los valores locales. Esto se lleva a cabo relacionando la viscosidad turbulenta con el gradiente de velocidad del flujo. Pero este simple modelo isentrópico no simula bien los flujos de mayor complejidad.

Los modelos clásicos de dos ecuaciones como el $k - \varepsilon$ son actualmente los mas utilizados, aunque el modelo RSM esta utilizándose cada vez más. Estos se basan en la presunción de que existe una analogía entre la acción de los esfuerzos viscosos y los esfuerzos de Reynolds en el flujo. En la ley de la viscosidad de Newton el esfuerzo viscoso es proporcional a la tasa de deformación de los elementos del fluido, que para un fluido incompresible se escribe como:

$$\tau_{ij} = \mu e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad [11]$$

Experimentalmente se observa que la turbulencia decae a menos que exista un esfuerzo cortante en el flujo incompresible isotérmico. Por otra parte, se encuentra que el esfuerzo turbulento aumenta conforme aumenta la tasa de la deformación. Boussinesq en 1877 propuso la hipótesis de viscosidad turbulenta que es

matemáticamente análoga a la relación de anterior de Newton, donde los esfuerzos de Reynolds se pueden asociar a las tasas de deformación.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \quad [12]$$

ésta ecuación muestra que el momento del transporte turbulento es proporcional a los gradientes de velocidad del flujo. Donde ν_t es la viscosidad turbulenta (o también llamada la viscosidad de Eddy).

El modelo $k - \varepsilon$ pertenece a la clase de modelo de dos ecuaciones, en los cuales las ecuaciones de transporte son resueltas para dos cantidades turbulentas, que para este caso son k y ε , de esas dos cantidades se pueden formar la escala de longitud $L = k^{3/2}/\varepsilon$, una escala de tiempo $\tau = k/\varepsilon$, una cantidad con dimensiones de viscosidad cinemática $\nu_T \propto (k^2/\varepsilon)$. Como consecuencia, los modelos de dos ecuaciones están completos.

Ya para el modelo de esfuerzos de Reynolds que pertenece a la clase de modelo de siete ecuaciones, las ecuaciones de transporte son resueltas para los esfuerzos de Reynolds individuales $\overline{u_i u_j}$ y para la disipación ε (o para otra cantidad que provea una longitud o una escala de tiempo de la turbulencia).

3.3 SOLUCIÓN NUMÉRICA DIRECTA (DNS)

No se trata de un modelo de turbulencia en sí mismo, sino de una solución completa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Este método resulta inabordable en problemas de altos números de Reynolds, ya que sería preciso resolver todas las escalas del movimiento. Para ellos resulta necesario definir un gran número de elementos, que diversos autores estiman del orden de $R_e^{9/4}$ aproximadamente. No obstante se han obtenido resultados para flujos simples a números de Reynolds moderados, ayudando así a la comprensión del fenómeno de turbulencia y al desarrollo de modelos más simples.

3.4 MODELO DE SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS (LES)

Entre la simulación directa de un flujo turbulento (dependiente del tiempo y a elevados números de Reynolds, en la que son resueltas todas las escalas de la turbulencia y no se precisa ningún modelado); y la resolución de ecuaciones promediadas de Reynolds, en las que los efectos de la turbulencia han de ser

modelados y solo se obtienen valores medios de los campos, aparece así la simulación de grandes escalas ("Large Eddy Simulation", LES) como una alternativa más económica en términos computacionales que el DNS. El desarrollo de LES se basa en la observación de que las pequeñas escalas de turbulencia poseen un carácter más universal que los grandes, por lo tanto la idea es resolver únicamente las grandes escalas de turbulencia y modelar el efecto de las pequeñas escalas.

La dificultad de proponer un modelo general para los efectos de las fluctuaciones turbulentas en las ecuaciones promediadas de Reynolds se identifica con la existencia de estructuras coherentes de gran escala, dependientes de las características concretas del flujo. Por otro lado, las soluciones exactas son inabordables excepto en algunos casos sencillos. Esto llevó a la búsqueda de esta tercera vía, en la que se resuelven numéricamente ecuaciones de evolución para las mayores escalas de la turbulencia, las dependientes de las condiciones del flujo, eliminando de la simulación las fluctuaciones más rápidamente variables (en el sentido espacial). La exigencia en cuanto a número de nodos del mallado será menor en estas simulaciones que en las simulaciones directas, por ser los campos más suaves.

El efecto de las pequeñas escalas turbulentas sobre los campos simulados habrá de ser introducido en forma de modelos, igual que el efecto de la turbulencia sobre los campos promedio ha de ser modelado en las ecuaciones promediadas de Reynolds. Pero gran parte de los fenómenos de transporte de cantidad de movimiento, calor y especies químicas serán tratados exactamente, por lo que los efectos de inexactitudes en el modelado serán menos acusados. Además, es de esperar que estos modelos sean universales, de aplicación general, por ser la turbulencia de pequeña escala prácticamente independiente de la geometría del problema concreto.

Como contrapartida a estas ventajas, las simulaciones de grandes escalas han de ser forzosamente tridimensionales y dependientes del tiempo, con mallados espaciales y temporales muy detallados, por lo que su coste, en comparación con la simulación de ecuaciones promediadas, será muy alto, aunque menor que el coste de una simulación directa. Siendo en sus inicios una técnica destinada a suplir a la DNS en su papel de herramienta académica para el estudio de la turbulencia y método de validación de modelos para los casos de alto número de Reynolds, la LES es ahora un método con vocación práctica de herramienta para la simulación numérica de problemas de interés industrial, gracias a la espectacular mejora en la capacidad de computación.

La oportunidad de encontrar mejores, más simples y más universales modelos en el caso de las simulaciones de grandes escalas descansa en las ideas de Kolmogorov sobre las grandes y pequeñas escalas. Efectivamente, si se esperase que la estructura y dinámica de las pequeñas escalas, y su interacción con las escalas resueltas, fuese diferente en flujos diferentes, no tendría sentido esperar encontrar un modelo universal para las pequeñas escalas. En las simulaciones basadas en las ecuaciones promediadas de Reynolds toda la turbulencia (de grande y de pequeña escala) ha de ser modelada y los modelos han de ser forzosamente dependientes del tipo de flujo turbulento.

Según la teoría de Kolmogorov, la generación de la turbulencia ocurriría a nivel de las grandes escalas, siendo dependiente de la geometría y la naturaleza del flujo. Las interacciones no lineales entre estas grandes escalas producirían vórtices de menor escala, es decir, las interacciones no lineales se traducirían en transferencia de energía de escalas grandes a escalas menores, que a su vez transferirían energía a otras menores (crearían escalas más pequeñas) hasta llegar al nivel de las menores escalas presentes en el flujo, las escalas disipativas, donde la energía sería disipada por efecto de la viscosidad. Así, en la zona de grandes escalas se observará un efecto de producción, dependiente del flujo concreto; en las zonas intermedias transferencia de energía de las mayores a las menores escalas y en las zonas de menor escala la disipación viscosa de las fluctuaciones. Esta es la llamada cascada de energía, un proceso a lo largo del cual la geometría y las características del flujo a gran escala se “olvidan” dando lugar a escalas intermedias, que se caracterizan únicamente por el flujo de energía y, a pequeñas escalas, únicamente caracterizadas por el ritmo de la disipación y por una longitud características.

La velocidad a que ocurre esta disipación viene dada por la estructura de las grandes escalas: el ritmo de producción determina el ritmo de transferencia y este a su vez determina el ritmo de la disipación. En definitiva, las escalas disipativas y las escalas intermedias del rango inercial pueden ser consideradas isotrópicas y universales, con el único efecto de transferir y disipar energía a un ritmo marcado por la producción de energía en las grandes escalas.

3.4.1 Filtrado. De la misma manera que en el método para los modelos tipo RANS se introduce una operación de promediado que elimina las fluctuaciones y define el campo promedio, el primer paso en una simulación de gran escala es definir una operación de filtrado que separe las escalas menores que una longitud dada de las mayores, definiendo así la parte del campo que la simulación resolverá. Esta operación es normalmente un filtrado espacial.

La operación de filtrado sobre una variable $U(x, t)$ define la variable filtrada como:

$$\bar{U}(x, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) U(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad [13]$$

A través de una función filtro $G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, cuya dependencia funcional con \mathbf{r} y \mathbf{x} determina el efecto del filtrado sobre la variable U . Si G es no nulo solo en un entorno pequeño de \mathbf{x} , se anula en el contorno del dominio de operación y cumple que su integral en todo el espacio es igual a la unidad, esta operación supone un promediado espacial local ponderado por $G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ y, por tanto, la variable filtrada contendrá menos fluctuaciones de pequeña escala que la variable original. El tamaño de las menores escalas de fluctuación presentes en el campo filtrado vendrá dado por la dependencia concreta del filtro con \mathbf{r} y \mathbf{x} . Además, si la dependencia espacial es $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ el filtrado será homogéneo, y si la dependencia de las tres direcciones del espacio es la misma, será además isotrópico. Esta operación de filtrado nos define el campo residual:

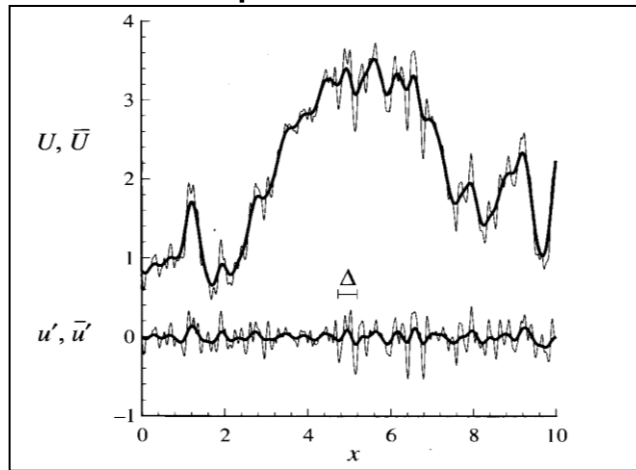
$$\mathbf{u}'(x, t) = \mathbf{U}(x, t) - \bar{\mathbf{U}}(x, t) \quad [14]$$

Debido a esto el campo de velocidades tiene la descomposición

$$\mathbf{U}(x, t) = \bar{\mathbf{U}}(x, t) + \mathbf{u}'(x, t) \quad [15]$$

En la siguiente figura se muestra esta característica del campo de velocidades filtrado.

Figura 1. Características del campo de velocidad filtrado⁶



⁶ *Turbulent flows*, Stephen Pope, 2000

En donde las líneas de arriba son un ejemplo de un campo de velocidades, y su correspondiente campo filtrado, donde Δ es el ancho del filtro que para el caso de la figura se usa filtro Gaussiano con $\Delta = 0.35$, mientras que las curvas de abajo es el campo residual \mathbf{u}' y su respectivo campo residual filtrado. Existen diferentes tipos de funciones de filtro y su respectiva función de transferencia entre las cuales las podemos encontrar en “*Turbulent Flows*”.⁷

Algunas propiedades de los operadores de filtrados son:

- Los filtros han de cumplir, como se ha indicado, que la integral a todo el espacio del filtro sea la unidad:

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} = 1$$

y son nulos en el contorno del dominio

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{Si } \mathbf{r} \in \Gamma$$

- La operación de filtrado sobre la componente de pequeña escala es diferente de cero

$$\overline{\mathbf{u}'}(\mathbf{x}, t) \neq 0$$

- Las operaciones de filtrado no cumplen que una variable filtrada sea constante bajo otras operaciones de filtrado

$$\overline{\overline{U}} \neq \overline{U}$$

3.4.2 Ecuaciones de evolución de las grandes escalas. Una vez definido lo que son grandes y pequeñas escalas, y definida una operación matemática que separe unas de otras, para obtener las ecuaciones de evolución para las grandes escalas basta con aplicar el operador de filtrado a las ecuaciones de evolución del flujo [2] (donde tomamos $\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ por simplicidad):

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad [16]$$

⁷ Pope, Stephen B. 2000

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U_i U_j}}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad [17]$$

Donde $\bar{p}(x, t)$ es el campo de presión filtrado.

Estas ecuaciones aparecen abiertas, con términos desconocidos procedentes de los términos no lineales, que representan los efectos sobre los campos de gran escala de las correlaciones entre los campos de subescala.

Descomponiendo los términos no lineales como suma de un término dependiente sólo de los campos de gran escala y un término en el que se represente el efecto sobre las grandes escalas de estas correlaciones:

$$\overline{U_i U_j} = \bar{U}_i \bar{U}_j + (\overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j) \quad [18]$$

Donde

$$\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j \quad [19]$$

Se pueden escribir las ecuaciones de evolución del campo de velocidad de gran escala en forma similar a las de Reynolds [10] para campos promediados:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U_i U_j}}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad [20]$$

Aquí la convección de gran escala del campo de velocidades está representada por un término convectivo con la forma habitual, es decir, un término no lineal que representa el transporte de cantidad de movimiento por parte del flujo resuelto y que es un término cerrado. El efecto de la convección de pequeña escala sobre los campos de gran escala está contenido en un término dependiente de τ_{ij} que, por analogía con las ecuaciones promediadas de Reynolds, se suele denominar *tensor de esfuerzos de subescala*. Aunque se use la palabra esfuerzos, el tensor τ_{ij} no tiene exactamente el mismo sentido que el tensor de esfuerzos de Reynolds. Este último representa correlaciones entre las fluctuaciones turbulentas mientras que el tensor τ_{ij} contiene términos de correlación entre grandes y pequeñas escalas e incluso términos puramente de gran escala, debido a la propiedad de las operaciones de filtrado de no ser idempotentes en el caso general.

Usando una descomposición del campo de velocidad en componentes de gran escala y de pequeña escala: $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}'$, se escribe:

$$\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j = (\overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j) + (\overline{U_i u'_j} + \overline{u'_i U_j}) + \overline{u'_i u'_j} \quad [21]$$

Donde

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (\overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j) \\ C_{ij} &= (\overline{U_i u'_j} + \overline{u'_i U_j}) \\ R_{ij} &= \overline{u'_i u'_j} \end{aligned}$$

Se comprueba, efectivamente, el tensor τ_{ij} no es únicamente función de correlaciones entre pequeñas escalas. La parte del tensor de esfuerzos de subescala puramente dependiente de las pequeñas escalas (R_{ij}) tiene la misma forma y función que el tensor de esfuerzos de Reynolds, y se denomina por ello *tensor de esfuerzos de subescala de Reynolds (SGS Reynolds Stresses)*, mientras que los otros dos términos dependen de correlaciones cruzadas entre grandes y pequeñas escalas (C_{ij} llamado *tensor de esfuerzos cruzados*) y parte de las correlaciones entre las grandes escalas (L_{ij} llamado *tensor de esfuerzos de Leonard*). En los casos en que estos esfuerzos cruzados y de Leonard tengan un peso importante en la magnitud de los esfuerzos totales, se verá que los modelos deducidos exclusivamente de aquéllos usados en ecuaciones promediadas de Reynolds no darán buenos resultados. Evidentemente cuanto más alejado esté el tamaño de filtro del rango disipativo menos importancia relativa tendrán estos términos, siendo más importante el tensor R_{ij} .

En el caso de flujos incompresibles, y debido a que el modelo clásico más usado (modelo de Smagorinsky) modela el tensor τ_{ij} con un tensor de traza nula, y a que el término de subescala correspondiente a la traza del tensor de esfuerzos tendrá un efecto similar al del término de presión, se suele separar:

$$\tau_{ij} = \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = \tau_{ij}^a + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \quad [21]$$

La traza del tensor de esfuerzos puede entonces incorporarse al término de presión y su efecto resolverse con él, modelándose solo la parte anisótropa del tensor de esfuerzos τ_{ij}^a .

Existen dos estrategias de modelado de los términos de pequeña escala o esfuerzos de subescala:

- Aproximar el tensor τ_{ij} a partir de una evaluación de la estructura de las pequeñas escalas.
- Modelar el efecto de las pequeñas escalas sobre las grandes mediante un término que actúe de la misma manera que el término $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$

En el primer caso se precisará conocer la estructura de las pequeñas escalas y se partirá del supuesto de que su estructura es universal, y que además puede ser deducida de la información contenida en el campo de gran escala. En el caso de optar por el segundo método de modelado no se precisan conocimientos sobre la estructura de las pequeñas escalas sino sobre su interacción con las grandes, ahora será esta interacción la que se supondrá tiene un carácter universal.

3.4.3 Modelos de interacción tipo Eddy Viscosity. Estos modelos suponen que la interacción entre las grandes y las Pequeñas escalas en un flujo turbulento desarrollado es, fundamentalmente, un Intercambio energético de tipo disipativo, y establecen una analogía entre la agitación a nivel molecular y la turbulencia de pequeña escala, que desde el punto de vista de las grandes escalas actuaría como una disipación viscosa. El movimiento molecular se traduce en un término de transporte de cantidad de movimiento proporcional al gradiente a través de la viscosidad en las ecuaciones de Navier–Stokes. De forma equivalente se modela el efecto del movimiento turbulento con un modelo de tipo gradiente para los términos τ_{ij}

$$\tau_{ij}^a = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} - \tau_{ij} = \nu_T \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -2\nu_T \bar{S}_{ij} \quad [22]$$

Donde \bar{S}_{ij} es el tensor velocidad de deformación y ν_T una viscosidad turbulenta, la llamada “Eddy–Viscosity”. Son modelos que parten de la misma base que los modelos de los esfuerzos de Reynolds, si bien en el caso de LES la viscosidad turbulenta habrá de representar solo la acción de las menores escalas de la turbulencia y no de toda ella.

Por consideraciones dimensionales, la viscosidad turbulenta se puede definir a partir de una longitud característica l_0 y una velocidad característica u_0 :

$$\nu_0 = l_0 u_0 \quad [23]$$

En los modelos de “eddy viscosity” usados para los esfuerzos de Reynolds estas magnitudes características se prescriben como parámetros del modelo, o bien se obtienen resolviendo ecuaciones de evolución para ellas o, mejor dicho, para una disipación y una energía cinética características, ε y k relacionadas con ellas. En el caso de LES, la longitud del filtro es una longitud característica de las escalas que se modelan, ya que las escalas no resueltas más cercanas al filtro serán las más importantes. Se supone que las pequeñas escalas están en equilibrio, esto es, que el ritmo al que se transfiere energía cinética a las pequeñas escalas iguala al ritmo a que esta se disipa por efectos viscosos.

3.4.4 Modelo de Smagorinsky. Este modelo se basa en el cálculo de la viscosidad turbulenta que después de una serie de operaciones matemáticas resulta en

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad [24]$$

Donde

$$|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \quad [25]$$

Y

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad [26]$$

La constante C_s es la constante de Smagorinsky, y está definida como un valor real positivo, por lo que la transferencia de energía según este modelo es siempre desde las escalas mayores a las menores (Δ es el ancho del filtro). Es un modelo puramente disipativo, que no es capaz de representar el “backscatter”, esto es, la transferencia de energía de las pequeñas escalas a las grandes escalas. Para representar este efecto se han adoptado dos tipos de soluciones: un termino de forzado aleatorio que añada energía en las grandes escala, o la modificación de la definición de la viscosidad turbulenta, de forma que pueda tomar valores negativos, como se trata en los modelos dinámicos. Otro problema es que, al estar basada la viscosidad exclusivamente en el valor de las derivadas del campo resuelto, no se anula en las zonas donde no hay escalas menores que las resueltas. Basta con que haya gradientes de velocidad, aunque sean de gran escala para que la viscosidad sea distinta de cero: no se anula si el flujo se hace laminar ni cerca de las paredes. Para adaptar el modelo a la transición o al comportamiento adecuado cerca de las paredes, se introdujeron funciones que controlaban el valor de la viscosidad haciéndola anularse en las paredes de forma similar a como se procede en el modelado RANS o en régimen laminar.

3.5 ECUACIONES DE FLUJO

Una vez introducido un modelo para el efecto de las escalas menores sobre las mayores, se tiene un sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad [27]$$

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i} \quad [28]$$

Las cuales describen el comportamiento del flujo. El primer paso para resolver numéricamente un sistema de ecuaciones en derivadas parciales como éste consiste en representar el espacio por un conjunto finito de puntos, es decir, elegir un mallado del espacio y una discretización de los campos y operadores del problema en él. Debido a esto, el sistema se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d \bar{U}_i}{dt} = h_i \quad [29]$$

Que es un problema de valor inicial, cuya integración en el tiempo dará lugar a la solución. En el caso de la simulación de grandes escalas, se pretende una simulación lo más exacta posible del sistema.

3.5.1 Corrección de presión. El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes presenta una particularidad: al ser un caso incompresible, de densidad constante, la ecuación de conservación de la masa no aparece como una ecuación de evolución sino como una condición suplementaria a las ecuaciones de evolución de U , la condición de evolucionar conservando la propiedad de tener divergencia nula. Por otro lado, una de las variables independientes del sistema, la presión, no aparece en forma dependiente del tiempo.

La condición de divergencia nula se puede reescribir como una condición para la presión: tomando la divergencia de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i^2} + \nu \nabla^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j \partial x_i} \quad [30]$$

y aplicando la condición de divergencia nula:

$$\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_j \partial x_i} \quad [31]$$

que es una ecuación elíptica de Poisson para la presión y que incluye la condición de divergencia nula para la velocidad. Indica que el término de presión en la ecuación [28] $-\partial \bar{p}/\partial x_i$ ha de ser tal que su divergencia compense la divergencia no nula que introducen en U los términos convectivos; en otras palabras, la convección ha de modificar el campo de velocidades sin sacarlo del espacio de divergencia nula y el gradiente de presión es la fuerza que controla que esto sea así.

El sistema resultante, formado por las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y la ecuación de Poisson para la presión, se resuelve de forma habitual usando la técnica de pasos fraccionados.

4. SIMULACION

La simulación del codo de 90° se llevó a cabo usando el paquete de software ANSYS que incluye el módulo de CFD, FLUENT.

Se abordó el problema desde la CFD utilizando tanto modelos tipo RANS (flujo estacionario) como LES (flujo transitorio). La ventaja de LES es la representación de la física real no estacionaria del flujo. Sin embargo, su desventaja frente a los métodos RANS es la ingente cantidad de tiempo de CPU y memoria necesarias lo que hace necesario disponer de un computador de altas prestaciones con varios procesadores que permita realizar un particionamiento del dominio con el objeto de realizar el cálculo en paralelo.

Se generó una malla del codo con un dominio computacional con el fin de representar un compromiso entre exactitud y tiempo de cálculo especialmente en el caso de LES. Los resultados se validarán mediante la comparación con datos experimentales y computacionales proporcionados por otros autores. En este caso se proponen como prueba de validación los resultados experimentales de Sudo et al. (1998).

4.1 METODOLOGÍA DE APLICACIÓN DE UN MODELO DE DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)

Los métodos de CFD resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido en movimiento. Todos los códigos de CFD constan de tres partes: Preprocesador, Solver y Postprocesador.

4.1.1 Pre-procesamiento: es la parte donde se especifica el problema que se desea resolver. La región fluida a analizar se llama dominio computacional en el cual se discretiza en un número finito de elementos conocido como malla. El usuario debe definir las propiedades del fluido a considerar, además de las condiciones iniciales y de frontera, como velocidades y/o presión; es una parte muy importante ya que si los valores que ingresamos al software no son los correctos podemos tener una solución sin saber que sea la correcta.

4.1.2 Solver: Esta parte se encarga de hacer el cálculo del problema. Aquí es donde se resuelve la versión directa de las ecuaciones básicas, las ecuaciones son resueltas tanto para estado transitorio como estacionario. Un concepto

importante es la convergencia ya que con esta se garantiza una solución con suficiente exactitud.

4.1.3 Postprocesamiento: es la parte donde se visualizan los resultados obtenidos por el solver, donde se pueden observar tanto contornos como vectores que representan las diferentes variables relevantes del flujo como presión, velocidad, energía u otras.

Cuando se resuelven numéricamente los problemas físicos, las diferentes componentes de dominio computacional deben ser representadas en una forma de que el software las entienda; esto se logra teniendo un ordenamiento del espacio nodal regular e irregular alrededor del dominio, llamada malla computacional, lo que hace esta malla es dividir en un número finito de elementos el dominio computacional; así los cálculos se pueden llevar a cabo en intervalos temporales definidos (ya sea en el caso transitorio) o sin definir para el caso estacionario. La solución numérica nos da valores en los puntos discretos del dominio en un tiempo específico. El proceso de convertir un problema de fluido en movimiento en un problema numérico discreto se conoce como discretización, la cual puede ser espacial y temporal

4.2 DOMINIO COMPUTACIONAL

El dominio computacional consiste en una tubería de diámetro 104 mm y una longitud de 1054,7 mm, basados en las condiciones experimentales de Sudo et al. (1998), considerando 2 diámetros antes del codo y 5 diámetros después de la curva (Figs. 2 y 3). Este dominio se eligió como compromiso entre exactitud y tiempo de cálculo para la simulación transitoria tipo LES:

4.3 CONDICIONES DE FRONTERA

A la entrada del dominio computacional se establece una condición de entrada de flujo completamente desarrollado (Fig. 4) para así obtener unos buenos resultados, con una velocidad media de $w_0 = 8.7 \text{ m/s}$, correspondiente a un número de Reynolds de 60000, según el arreglo experimental. La condición de frontera de las paredes es de pared sólida (donde hay condición de no deslizamiento), la salida de la tubería es una condición de presión de salida, donde se fija el valor de presión 0 Pa como presión de referencia.

Figura 2. Dimensiones del dominio computacional

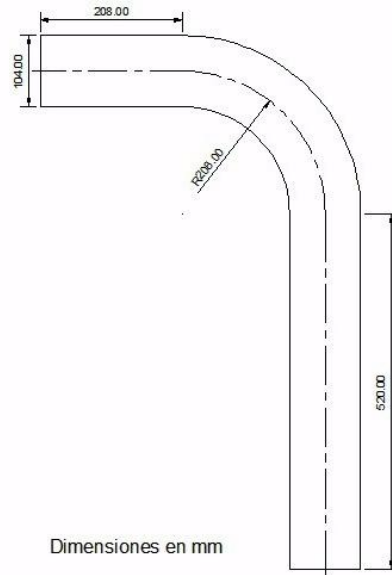


Figura 3. Modelo geométrico del dominio

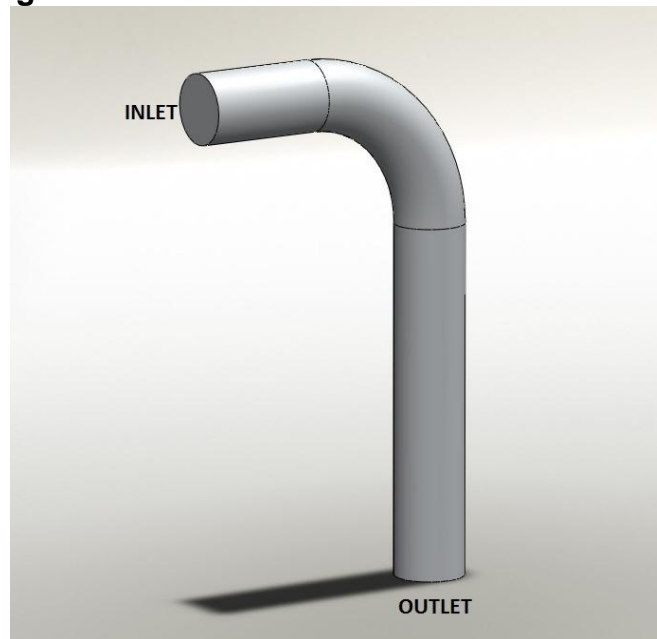
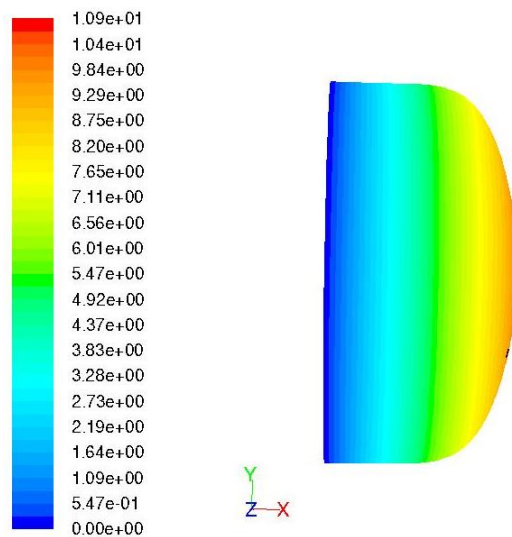


Figura 4. Perfil de velocidades a la entrada de la tubería



4.4 GENERACIÓN DE LA MALLA

Esta malla se generó con el paquete de malla de ANSYS-ICEM, en el cual es posible generar diferentes tipos de malla, tanto estructurada como no estructurada; para esta simulación se usó una malla estructurada, con volúmenes de control hexaédricos. Además se usó una O-Grid sobre la sección transversal para así tener una buena relación de distorsión de los volúmenes de control (Fig. 8), desde el centro de la tubería hacia las paredes, refinando la malla cerca de las paredes para resolver el flujo en sus cercanías. Para las simulaciones se usó una malla de 1.1 millones de volúmenes de control (Fig. 5), después de haber hecho varias simulaciones previas con diferentes mallas. Se usó esta malla tanto para los modelos tipo RANS como LES.

Figura 5. Enmallado total del dominio

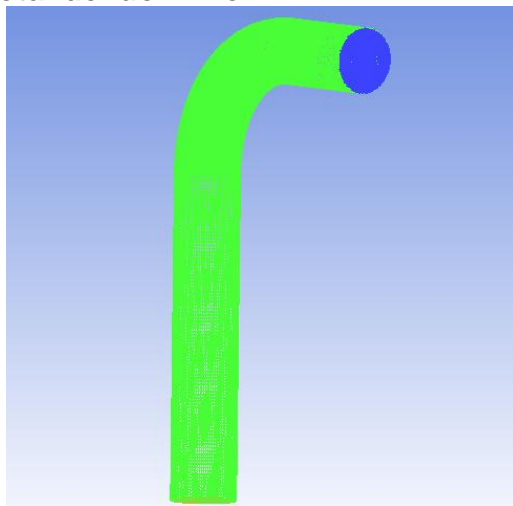
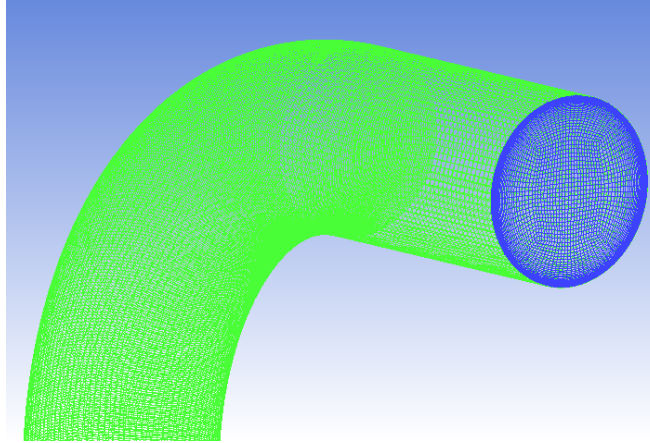


Figura 6. Detalle de la malla sobre la cara de entrada



Debido a las necesidades computacionales de los modelos, especialmente del modelo LES, fue necesario una malla lo suficientemente fina para poder describir el desarrollo de las pequeñas escalas. La malla además requería una buena relación de aspecto, con refinación cerca de las paredes de la tubería. La idea es que la densidad de elementos debe ser suficiente en este lugar, para resolver de manera precisa la capa límite cerca de la pared. En nuestra simulación el parámetro y^+ está por debajo de 5, es decir dentro de la subcapa viscosa. De acuerdo con las recomendaciones de otros autores, para garantizar una buena simulación, la calidad de la malla debe estar por encima de 0.80 sobre todo el dominio.

Con el paquete Ansys ICEM es posible determinar la calidad de la malla. La figura 7 nos da algunos valores entre 0.7 y 0.8, pero el número de volúmenes de control es muy pequeño, del orden de 300 comparado con 1,1 millones de elementos (es decir menos del 0.01%) por lo que la calidad de la malla generada es suficiente para realizar con garantías las simulaciones.

Figura 7. Calidad de la malla

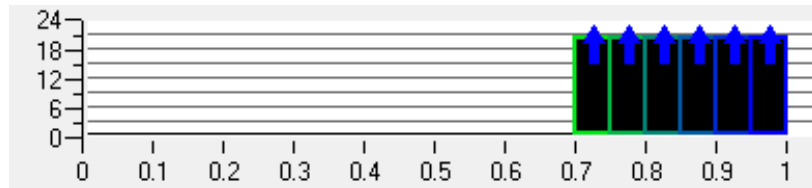
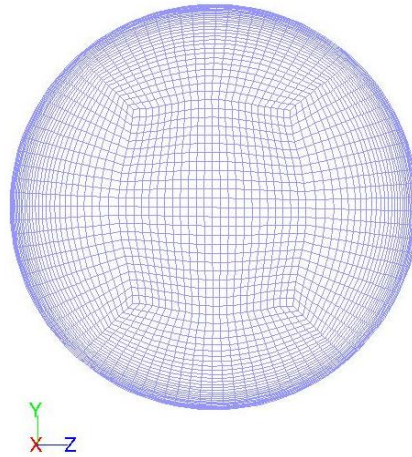


Figura 8. O-grid de la sección transversal



4.5 DISCRETIZACIÓN

Para la discretización de las ecuaciones, ANSYS-FLUENT usa diferentes métodos. El esquema usado para este modelo fue el de segundo orden upwind para la ecuación de momento, ya que este modelo permite que la discretización de las ecuaciones sea un poco más precisa a diferencia del modelo de primer orden, y para la presión de segundo orden así como para las variables turbulentas de los modelos RANS. En el caso de LES es indispensable el estado transitorio para la simulación, donde el esquema de discretización temporal empleado fue de segundo orden, con un paso temporal de 5×10^{-5} segundos, ya que este nos aseguraba un número de Courant inferior a 1, con el objeto de asegurar la exactitud de la descripción de la evolución temporal.

4.6 RESULTADOS Y ANALISIS

4.6.1 Simulación con el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$. En esta simulación se usó una estación de trabajo, con un procesador Intel Xeon (R) X5660 @ 2,8GHz, de 6 núcleos, con una memoria RAM de 4 GB. El tiempo requerido para realizar los cálculos de la simulación para este modelo fue de aproximadamente 2 días.

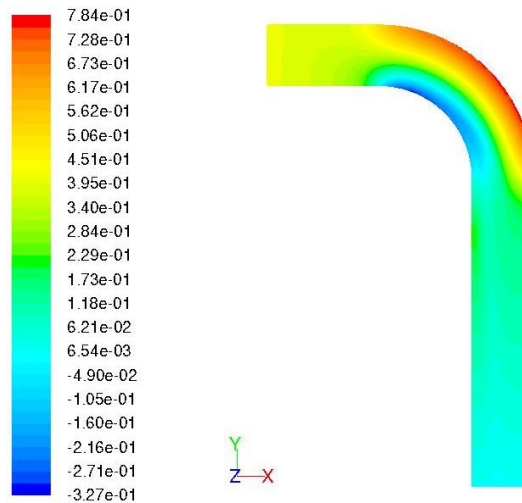
- **Coeficiente de presión**

El coeficiente de presión está definido por la siguiente expresión

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \quad [32]$$

Los contornos del coeficiente de presión C_p , se muestran en la figura 9, sobre el plano medio de la tubería ($z = 0$). En ella podemos observar que hay valores de presión positivos en la parte externa del codo, y presiones negativas en la parte interna del codo, es decir se establece un gradiente de presión en la sección transversal del codo.

Figura 9. Contornos de coeficiente de presión en el plano $z = 0$ para el modelo $k - \varepsilon$



Además de estos contornos sobre el plano medio, se decidió extraer valores puntuales a lo largo de la geometría, teniendo en cuenta la parte interna, del medio y externa del codo.

Para esta grafica el eje x es dado para una distancia longitudinal a lo largo de la línea central del dominio s , normalizada por el diámetro de la tubería D . s/D es 0 a la entrada del codo, es decir en 0° , y toma el valor de π a 90° . Aguas abajo de la salida del codo el valor de s/D aumenta y antes de la entrada del codo adopta valores negativos. En nuestro dominio computacional la distancia s/D varía continuamente entre -2 y 8.142 (Fig. 10). Esta es la escala horizontal utilizada en la Figura 11.

Figura 10. Planos del dominio

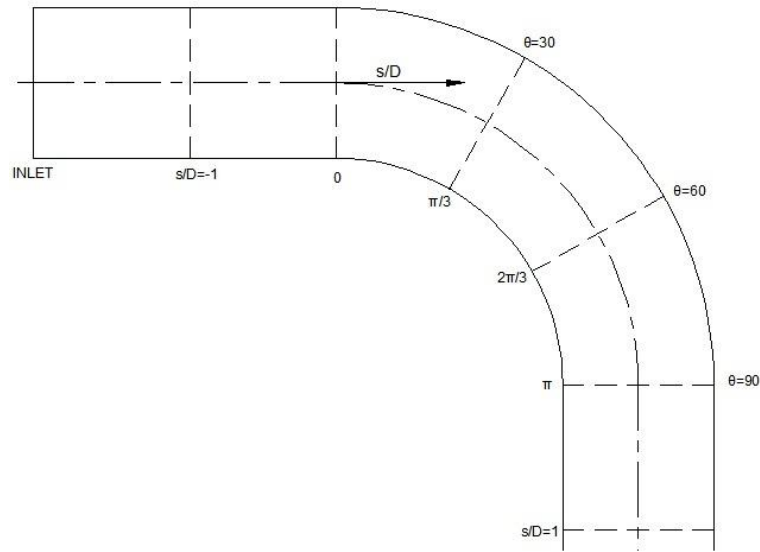
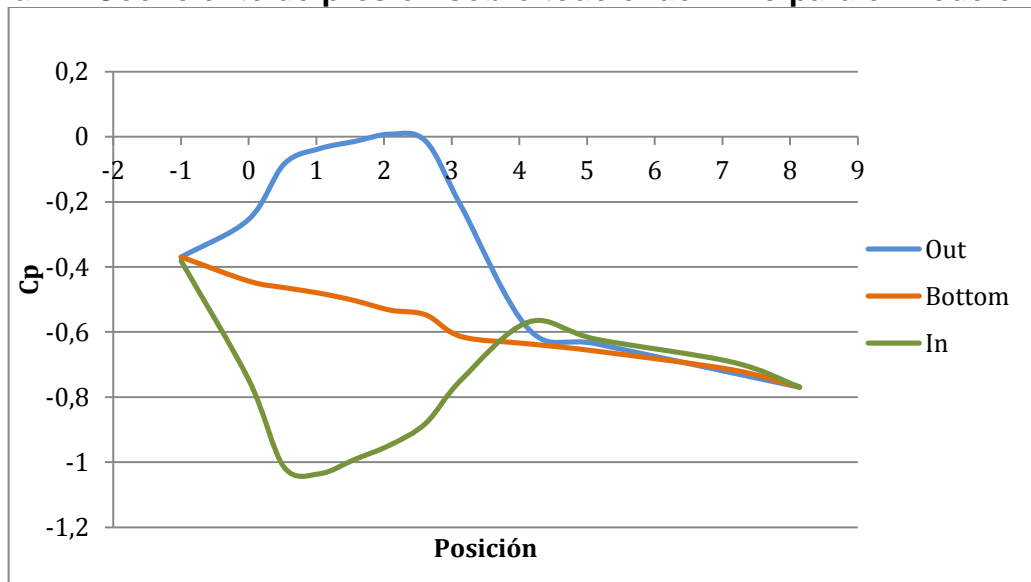


Figura 11. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo k- ϵ

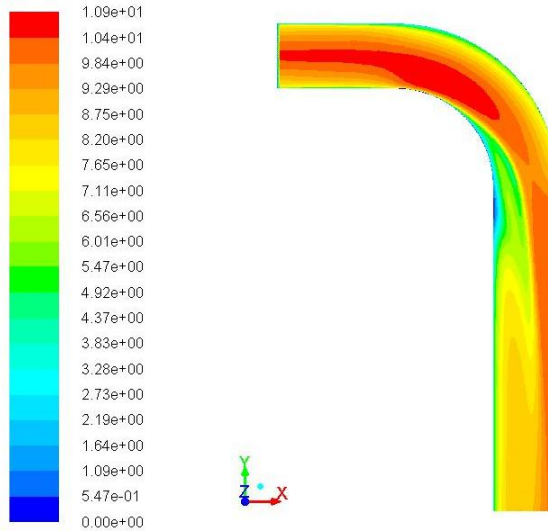


Vemos como el coeficiente de presión aumenta en la pared externa del codo y disminuye en la interna, mostrando el gradiente de presión mencionado a lo largo del codo, el cual es responsable de la aparición del flujo secundario. Además, observamos que los coeficientes de presión presentan valores prácticamente iguales en las paredes externa e interna en $s/D = -1$ y 1 , localizaciones que podemos utilizar para calcular la caída de presión en el codo.

- **Velocidades medias**

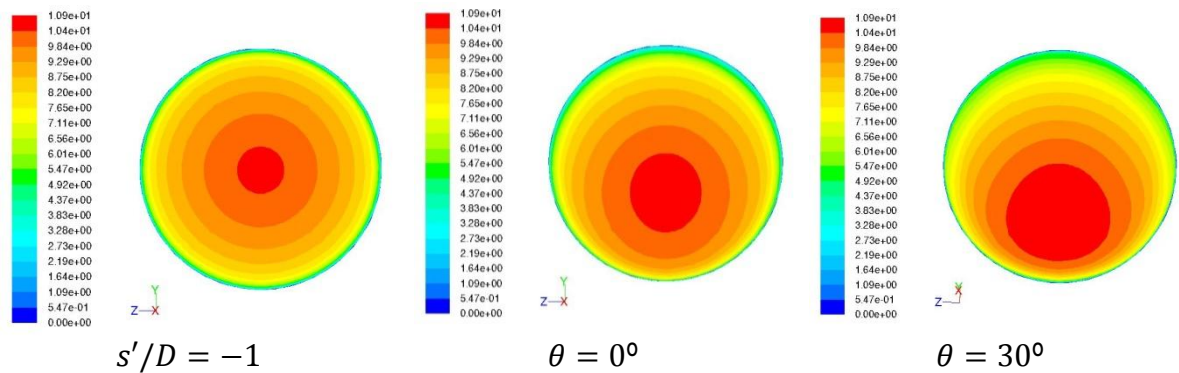
Los contornos para el plano medio, de las velocidades medias resultantes de la simulación definido a $z = 0$, se muestran en la figura 12

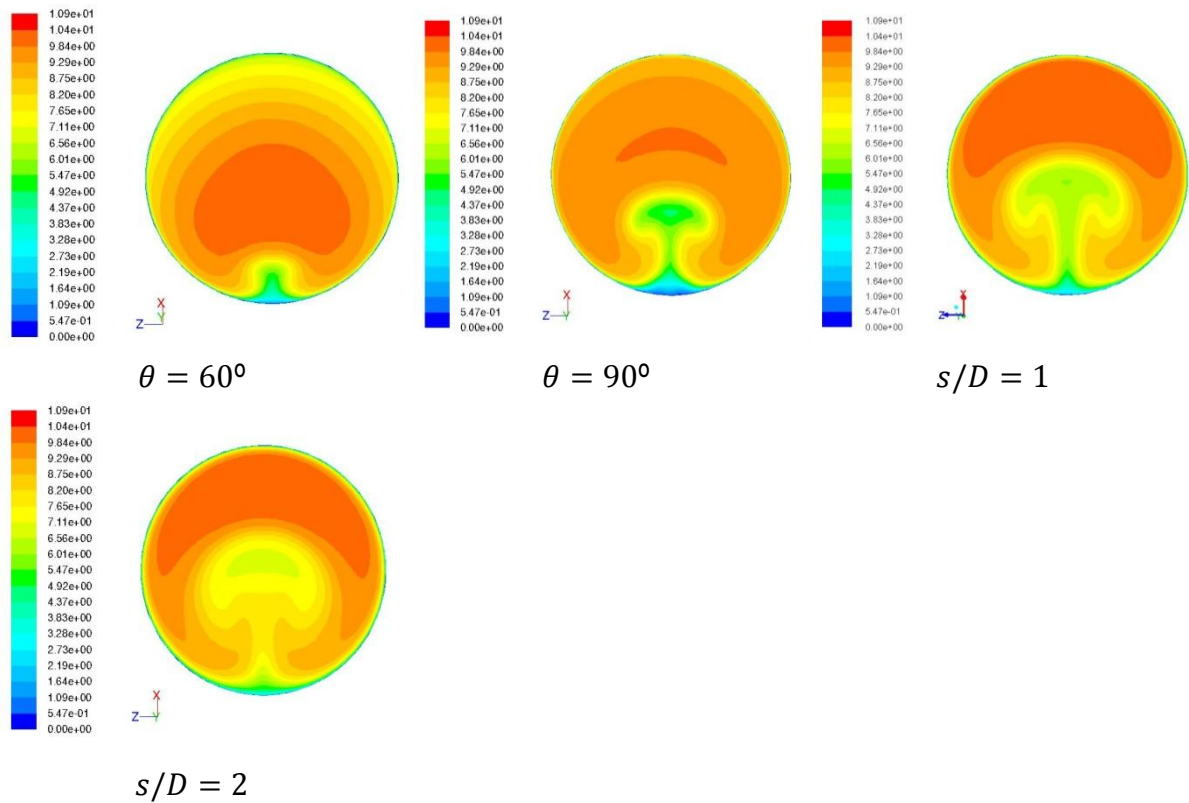
Figura 12. Contornos de Velocidad en el plano $z = 0$ para el modelo $k - \varepsilon$



Vemos de esta grafica que en la parte interna del codo a $\theta = 0^\circ$, el fluido empieza a ser acelerado cerca de la pared, de acuerdo con el gradiente de presión favorable inicial; simultáneamente, el fluido cerca de la pared exterior es desacelerado de acuerdo con el gradiente de presión adverso inicial. Esto introduce un flujo secundario hacia la pared interna sobre toda la sección transversal como se muestra en las diferentes secciones de la figura 13, además se observa que a la salida del codo hay una disminución de la velocidad axial debido a la aparición del flujo secundario.

Figura 13. Contornos de velocidad para diferentes planos sobre el dominio





Entre $\theta = 30^\circ$ y $\theta = 60^\circ$, el flujo secundario empieza a ser evidente sobre la sección transversal debido a la fuerza centrífuga, y forma 2 vórtices que giran en sentido contrario que circulan hacia afuera en la parte central de la tubería y hacia adentro cerca de las paredes internas y externas. El fluido con alta velocidad longitudinal, se mueve cerca de la pared interior de la curva como antes. A $\theta = 60^\circ$, el fluido rápido cerca de la pared interna es transportado por el flujo secundario hacia la pared exterior a través de la región central de la sección transversal. El fluido lento cerca de las paredes exterior e interior, es llevado hacia la pared interior sobre la pared debido al flujo secundario. Puesto que la presión en este punto, además, se incrementa cerca de la pared interior en la dirección longitudinal, el fluido cerca de la pared interna empieza a desacelerar.

El flujo secundario crece rápidamente cerca de este punto, después de esto el fluido rápido en el flujo primario se mueve más hacia la parte exterior sobre el plano horizontal simétrico de la curva debido al fuerte flujo secundario. De 75° a 90° , el flujo rápido de la pared externa es llevado hacia la pared interior por el flujo secundario que se mueve hacia adentro en las cercanías de la pared. Esto genera contornos de velocidad altamente distorsionados que tienen forma de hongo que encierran la región de baja velocidad cerca de la pared interna.

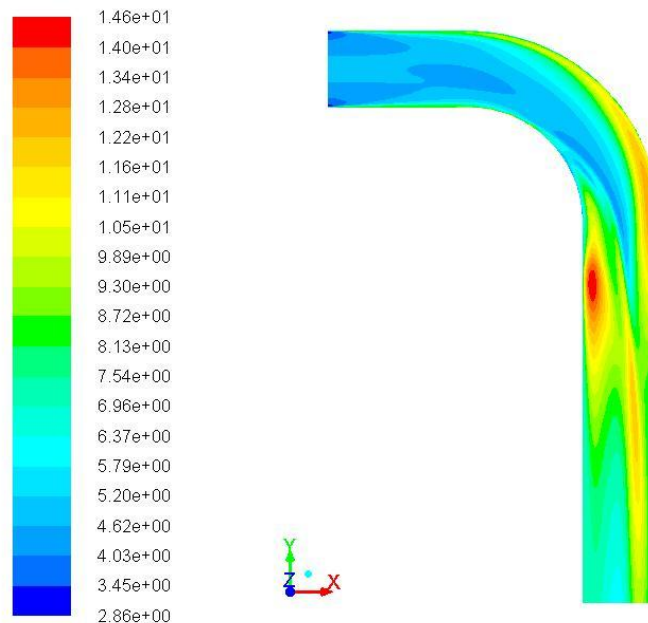
- **Intensidad Turbulenta**

La intensidad turbulenta está dada por la siguiente expresión

$$I = \frac{u'}{U} \quad [33]$$

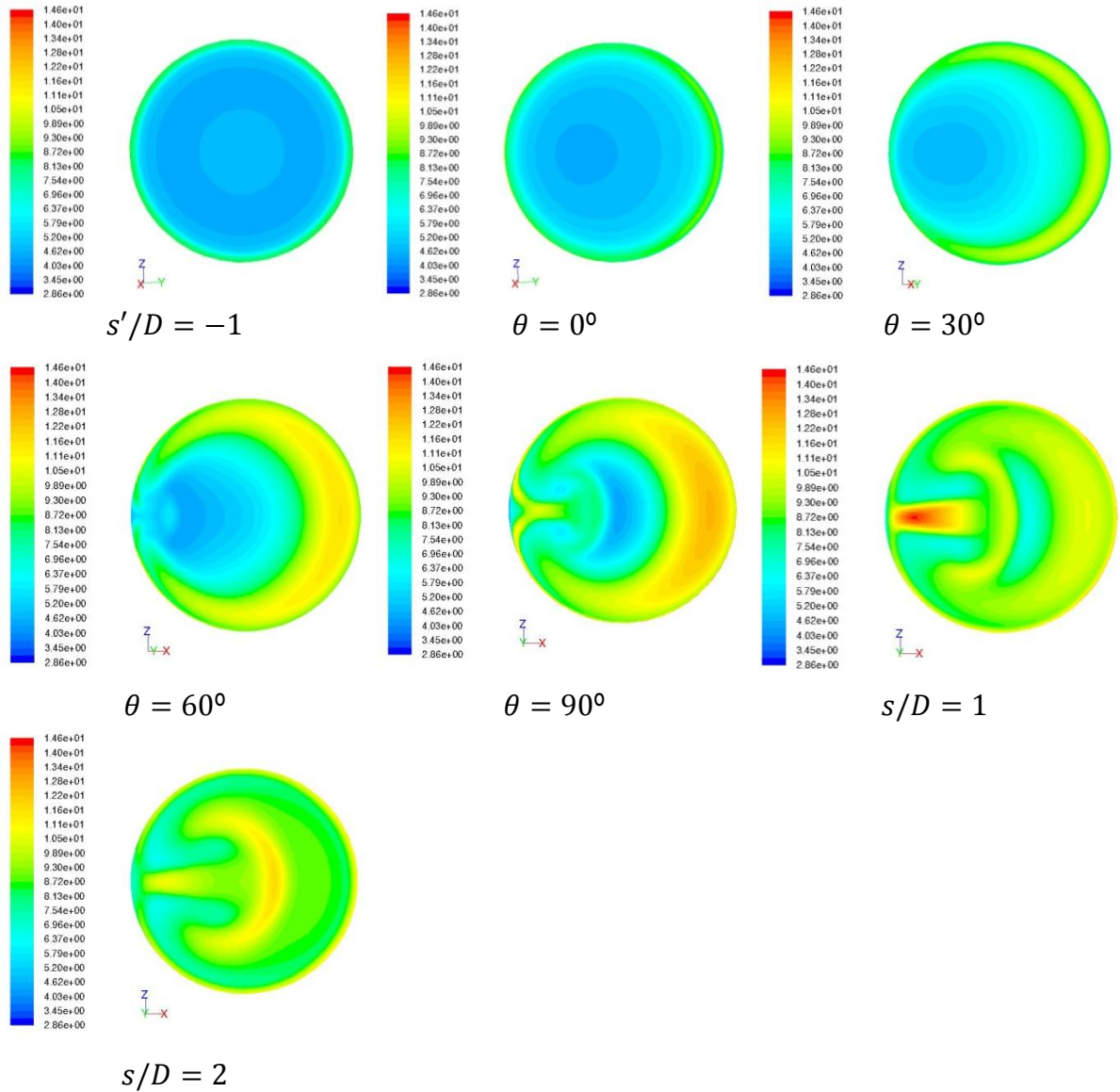
Para una sección en el plano medio es la siguiente (figura 13)

Figura 14. Contornos de intensidad turbulenta en el plano $z = 0$, para $k - \varepsilon$



Vemos de esta grafica que en la parte interna del codo a $\theta = 0^\circ$, la intensidad turbulenta mayor está localizada cerca de las paredes de la tubería, como corresponde a un tramo recto. Debido al flujo secundario, existe un transporte de la energía cinética turbulenta en el interior del codo que se extiende desde la pared externa. Finalmente a la salida del codo, y debido a los altos gradientes de velocidad media encontrados en la pared interna, se genera energía fluctuante en esa zona. Eventualmente la disipación predomina en esta zona, disminuyendo la intensidad de la turbulencia en el tramo vertical y tendiendo de nuevo a la situación de valores más elevados de I cerca de las paredes al final del dominio. La figura 15 muestra la evolución de los respectivos contornos a lo largo del tramo de tubería.

Figura 15. Contornos de intensidad turbulenta para diferentes planos en el dominio



Antes de la entrada del codo los cambios en la intensidad turbulenta no se observan muy bien por lo comentado anteriormente; entre 0° y 30° la intensidad turbulenta incrementa en la parte exterior de la sección transversal correspondiendo así al incremento de los gradientes de velocidad en la dirección radial. A 60° una región con altos valores de intensidad turbulenta se observan en la vecindad de la pared interna coincidiendo con los gradientes de velocidad cerca de la pared interior. A la salida de la tubería, $\theta = 90^\circ$, las extremas fluctuaciones se producen localmente cerca de la pared interior mostrada en los contornos de velocidad debido a los fuertes gradientes de velocidad, donde su máximo valor alcanza el 14,5%. Entre 90° y $z/d = 2$ la intensidad turbulenta en la región interior

se mueve hacia la parte exterior de la sección transversal a lo largo de la simetría del plano, correspondiente al cambio de la región de baja velocidad longitudinal hacia la pared exterior. Después de $z/d = 2$ la intensidad turbulenta va desapareciendo, siendo relativamente más suave.

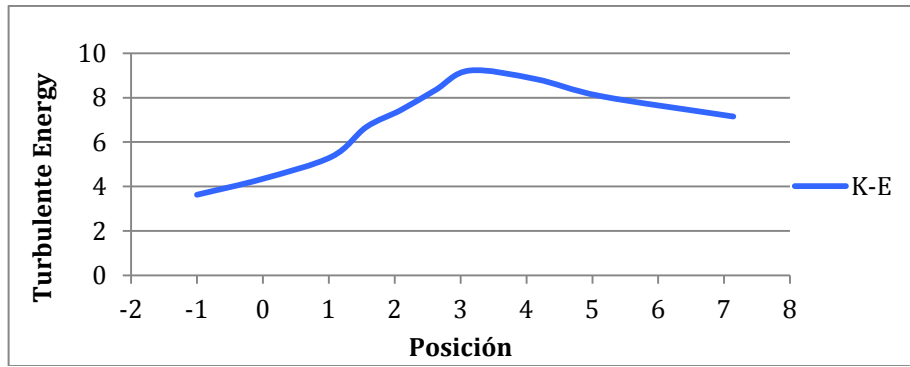
- **Energía turbulenta**

La energía cinética turbulenta está dada por la siguiente ecuación

$$k = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \quad [34]$$

Fue calculada para cada sección transversal sobre la tubería donde se muestra en la figura 16

Figura 16. Energía cinética turbulenta para diferentes planos del modelo $k - \varepsilon$.



Como podemos observar la energía cinética turbulenta va en aumento desde antes del codo siendo su máximo valor como se espera a la salida del codo justamente a $\theta = 90^\circ$, y va en decremento cada vez más nos alejamos de él.

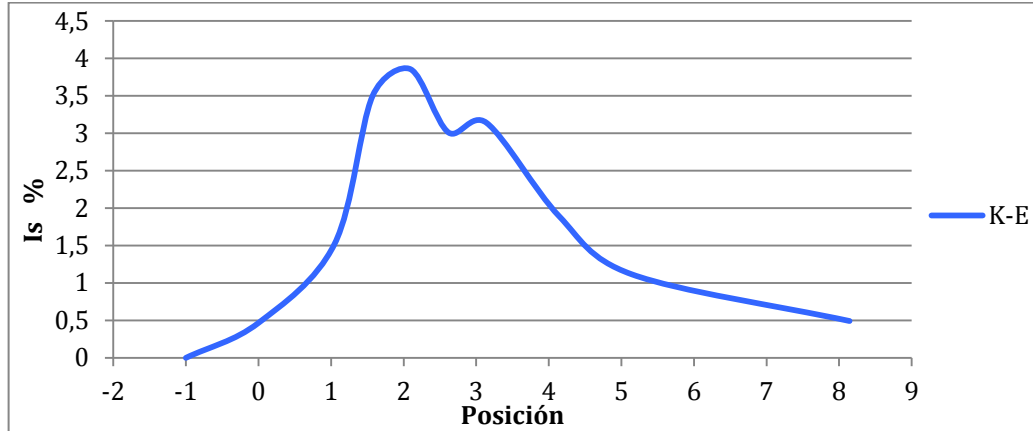
- **Intensidad de flujo secundario**

Al igual que la energía cinética turbulenta, la intensidad de flujo secundario dada por la siguiente expresión (a es el radio de la tubería)

$$I_s = \frac{4}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) r dr d\theta \quad [35]$$

Esta fue calculada para cada sección para la cual tenemos los resultados mostrados en la figura 17.

Figura 17. Intensidad de flujo secundario para diferentes planos sobre el dominio



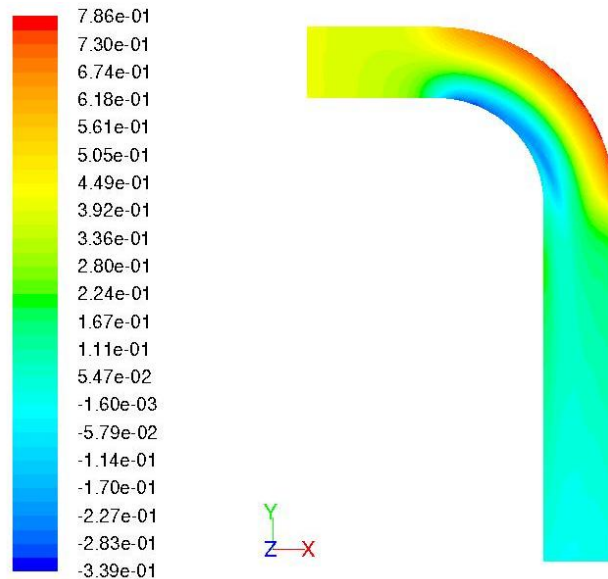
El flujo secundario empieza a producirse en la vecindad de la parte interna del codo y cada vez va en aumento hasta alcanzar su valor máximo entre 60° y 70° , después de esto la intensidad va disminuyendo aunque a 90° vuelve a tener un pico pero no mayor que el de 60° , después de esto va disminuyendo cada vez más, y podemos observar que la influencia del flujo secundario se da hasta valores mucho más alejados del codo.

4.6.2 Simulación con el modelo de turbulencia *RSM* (Reynolds Stress Model). Al igual que la simulación anterior se usó una estación de trabajo, con un procesador Intel Xeon (R) X5660 @ 2,8GHz, de 6 núcleos, con una memoria RAM de 4 GB. El tiempo requerido para realizar los cálculos de la simulación para este modelo fue de aproximadamente 4 días, que es el doble de tiempo que para el modelo k- ϵ , debido al mayor número de ecuaciones que deben resolverse.

- **Coeficiente de presión**

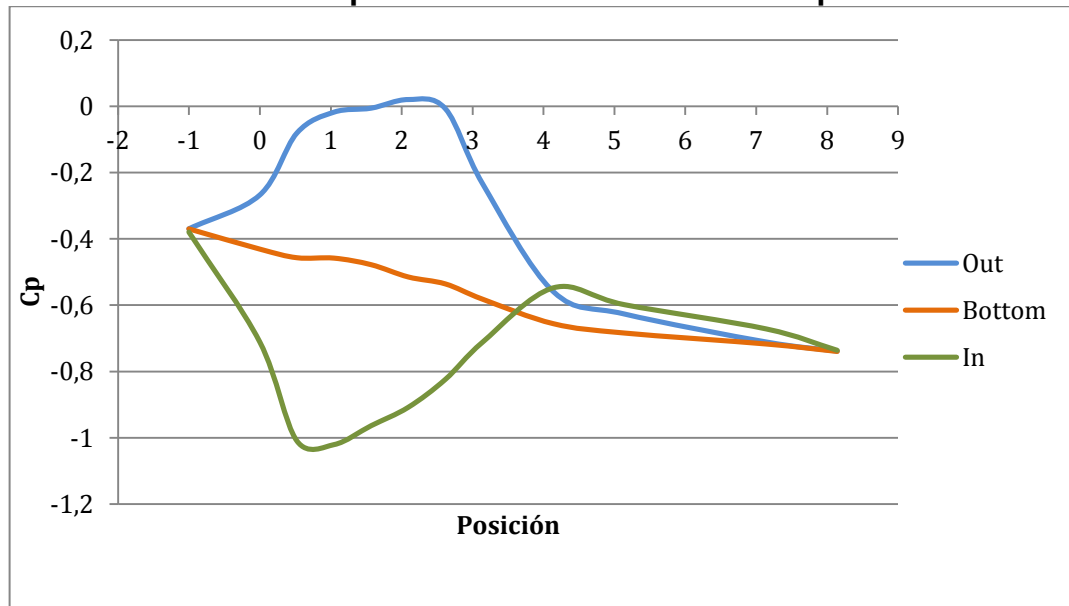
El coeficiente de presión ya definido por la ecuación de la sección anterior, de la cual los contornos del coeficiente de presión C_p , están mostrados en la figura 18, sobre el plano medio de la tubería $z = 0$

Figura 18 .Contornos de coeficiente de presión en plano $z = 0$, para el modelo RSM



Además de estos contornos sobre el plano medio, se determinaron los valores puntuales sobre toda la geometría, teniendo en cuenta la parte interna, del medio y externa del codo, al igual que con el modelo $k-\varepsilon$ (figura 19).

Figura 19 . Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo RSM

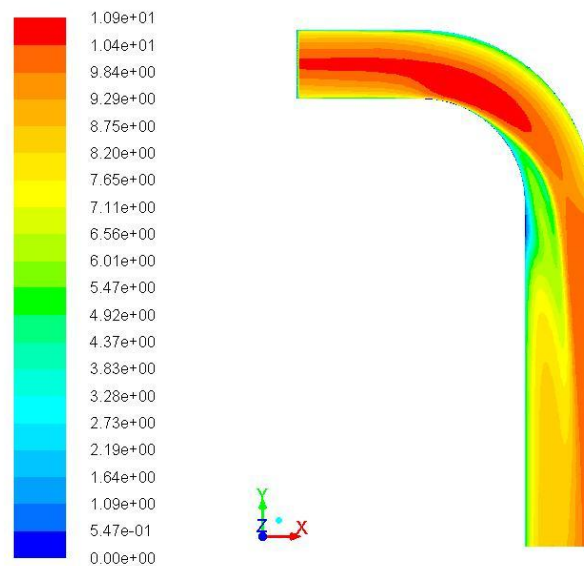


De estos contornos cual podemos observar que al igual que la simulación con el modelo anterior, hay valores de presión positivos en la parte externa del codo, y por el contrario hay presiones negativas en la parte interna del codo. Los valores numéricos son muy similares a los obtenidos con el modelo $k-\epsilon$.

- **Velocidades medias**

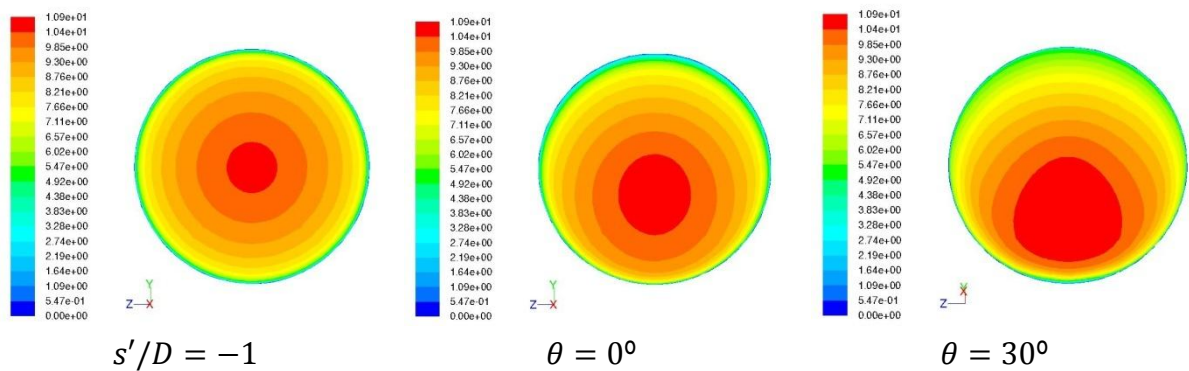
Los contornos para el plano medio, de las velocidades medias resultantes de la simulación definido a $z = 0$, están dados por la figura 20.

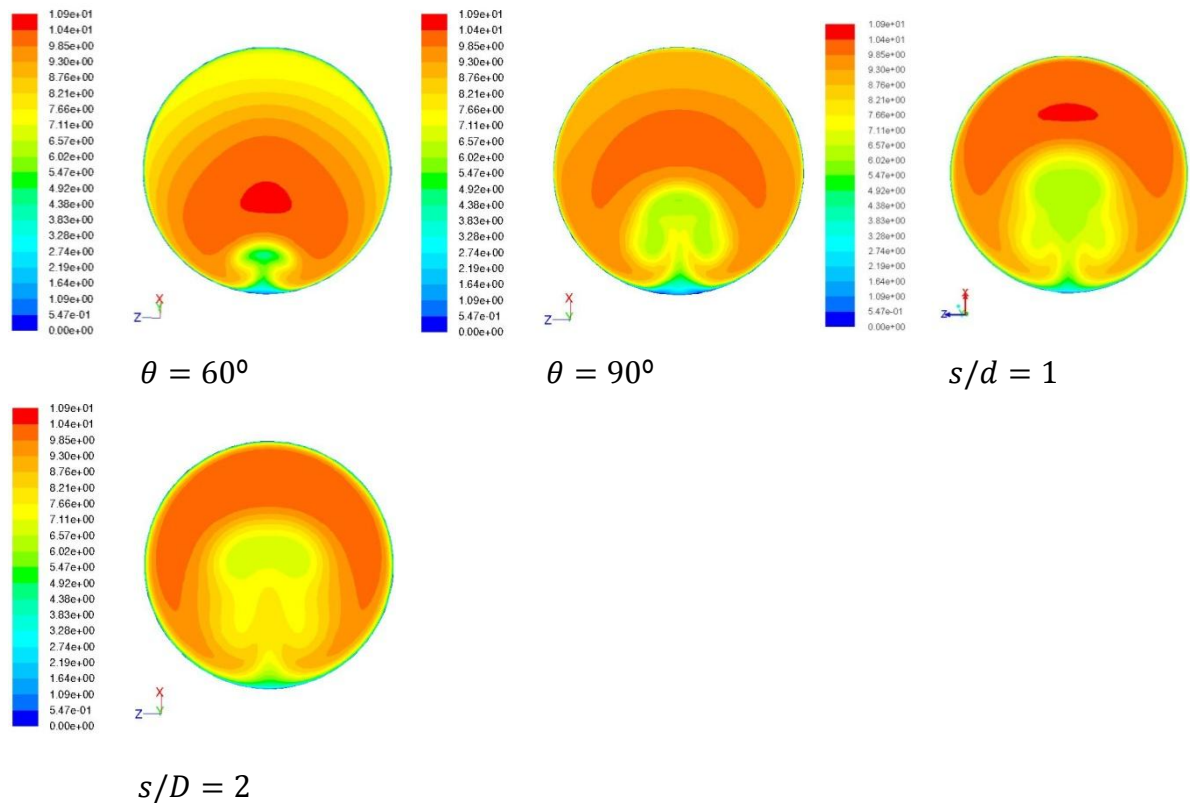
Figura 20. Contornos de Velocidad en el plano $z = 0$, para el modelo RSM



Se observan contornos muy similares a los obtenidos con el modelo $k-\epsilon$.

Figura 21. Contornos de velocidad sobre todo el dominio, para el modelo RSM



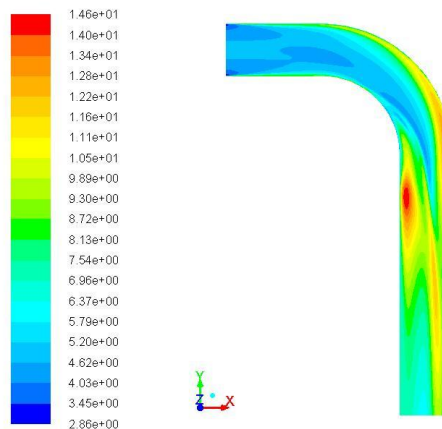


Los mismos comentarios que se hicieron en el caso del modelo $k-\varepsilon$ son válidos aquí sobre el desarrollo de los contornos de velocidades. Sin embargo, se observan algunas diferencias en las secciones a la salida del codo donde los contornos en forma de hongo son algo más distorsionados que en el modelo $k-\varepsilon$.

- **Intensidad Turbulenta**

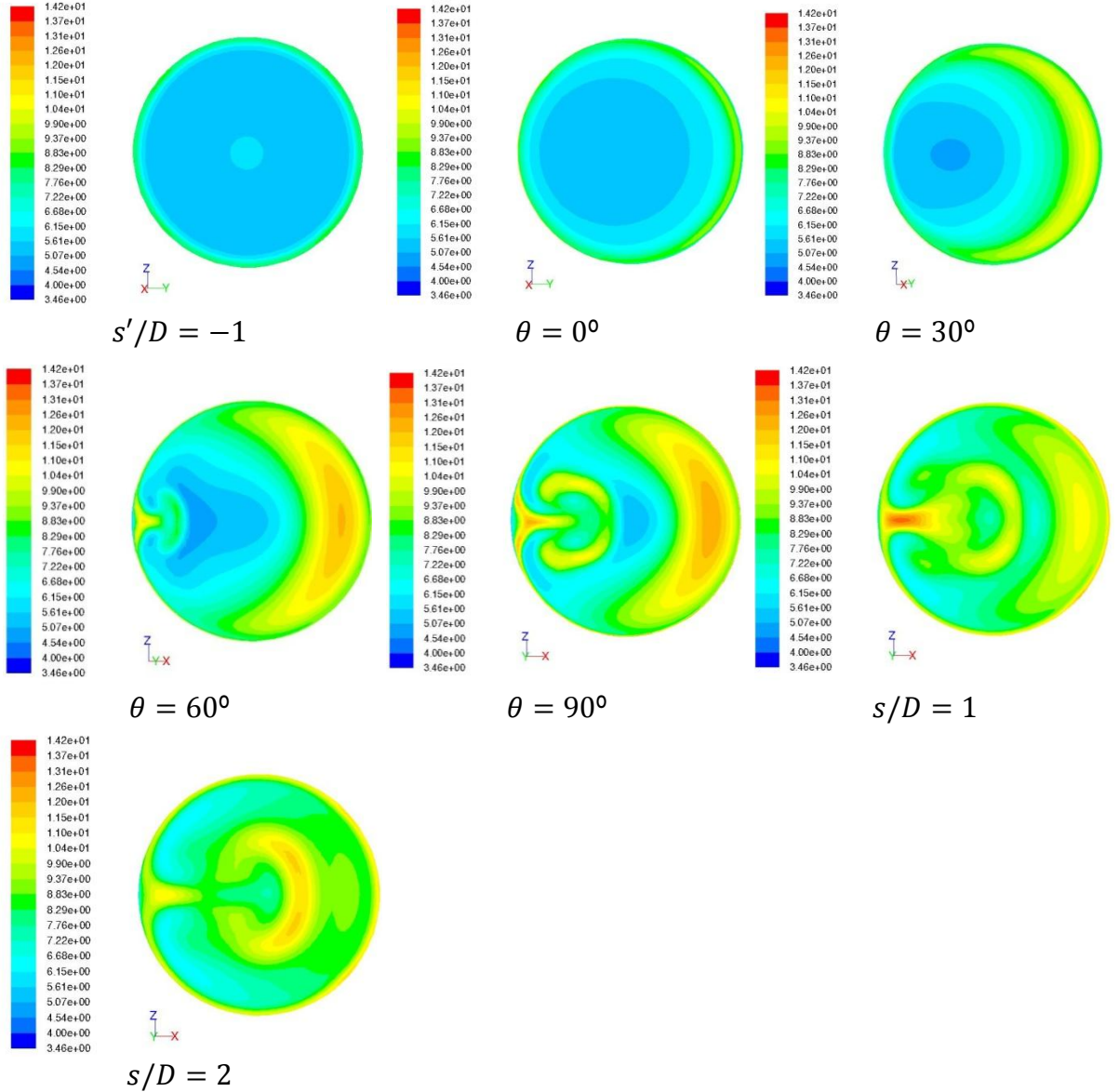
Los contornos intensidad turbulenta en el plano medio es la siguiente (figura 22)

Figura 22. Contornos de intensidad turbulenta en el plano $z = 0$, para el RSM



De esta grafica se puede observar que de nuevo los resultados son muy similares a los obtenidos con el modelo k- ϵ . La intensidad turbulenta de flujo entre los diferentes ángulos del codo son las siguientes (figura 23) donde se pueden realizar los mismos comentarios.

Figura 23. Contornos de intensidad turbulenta en diferentes planos, para el RSM



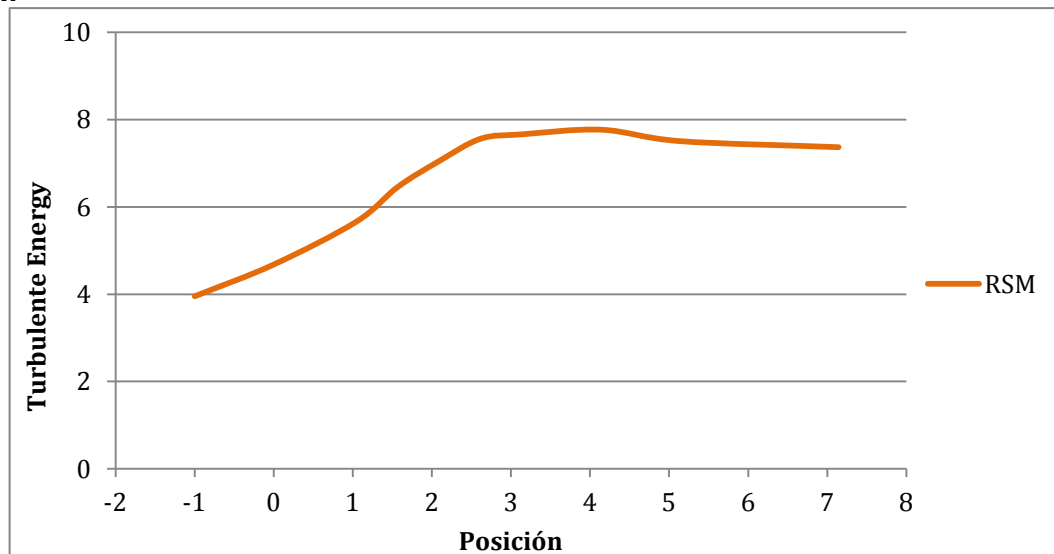
- **Energía turbulenta**

La energía cinética turbulenta dada por la siguiente ecuación

$$k = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \quad [34]$$

Como vemos esta ecuación toma en cuenta los valores fluctuantes que el modelo, supuso en sus cálculos, donde varían a medida que cambia el dominio; se calculo para cada sección transversal sobre la tubería, tanto valores antes del codo como después de este, en la cual se muestra en la figura 24.

Figura 24. Energía cinética turbulenta para diferentes planos para el modelo RSM



Como podemos observar la energía cinética turbulenta va en aumento desde antes del codo siendo su máximo valor entre $\theta = 90^\circ$ y $z/d = 1$ como se esperaba, y va en decremento cada vez más nos alejamos de él aunque un poco más lento.

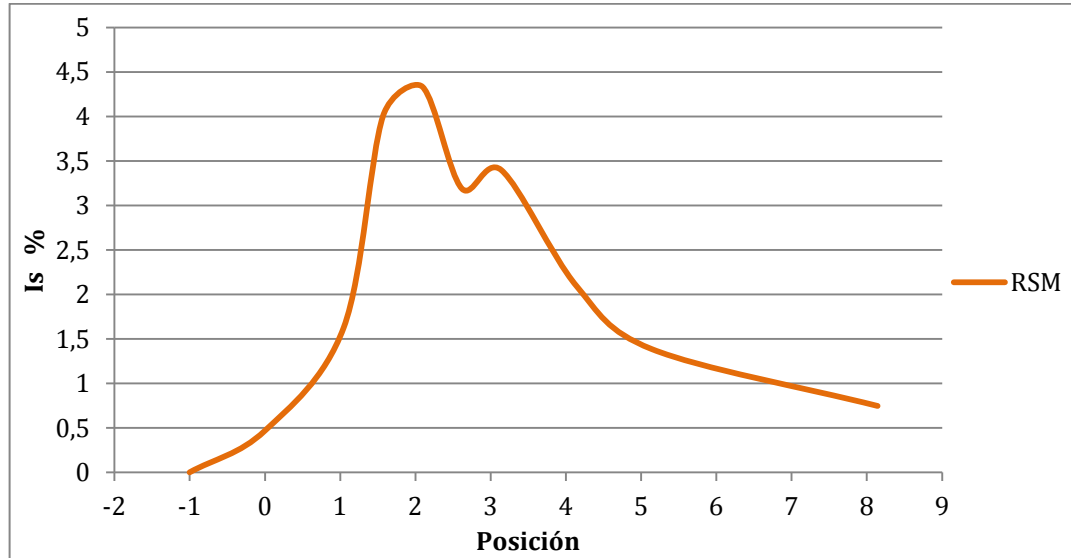
- **Intensidad de flujo secundario**

Intensidad de flujo secundario dada por la siguiente expresión para cualquier lugar del dominio

$$I_s = \frac{4}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) r dr d\theta \quad [35]$$

Esta fue calculada cada sección para la cual tenemos los siguientes resultados (figura 25)

Figura 25. Intensidad de flujo secundario para diferentes plano para el modelo RSM



El flujo secundario se empieza a producir en la vecindad de la parte interna del codo y cada vez va en aumento hasta alcanzar su valor máximo entre 55° y 65°, después de esto la intensidad disminuye cerca de 75° pero vuelve a aumentar hasta los 90°, después de esto empieza a disminuir notablemente hasta más allá del codo, es decir que sigue influyendo en las características del flujo.

4.6.3 Simulación con el modelo de turbulencia *LES* (Simulación de grandes escalas). A diferencia de los dos modelos anteriores, la simulación de grandes escalas, nos permite conocer y observar los valores instantáneos de la velocidad ya que esta no solamente nos muestra sus valores medios, sino que es posible observar las fluctuaciones del campo de velocidades. Inicialmente en los cálculos, se estimó como necesario tener un tiempo de promediado mayor a 6 veces el tiempo de residencia del dominio, para que tuviéramos unos resultados coherentes con la teoría.

El tiempo de residencia esta dado por la siguiente ecuación

$$t_r = \frac{L}{U} \quad [36]$$

Donde L es la longitud característica y U es la velocidad media característica, que para este caso es w_0

Un ejemplo de la velocidad instantánea se muestra en las figuras 26 y 27

Figura 26. Velocidad instantánea sobre el plano medio $z = 0$

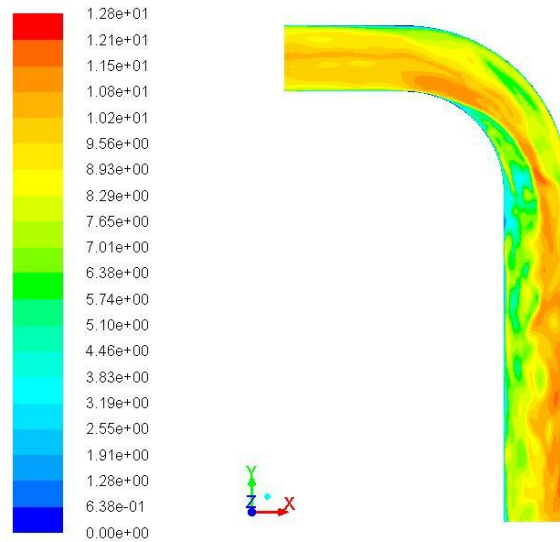
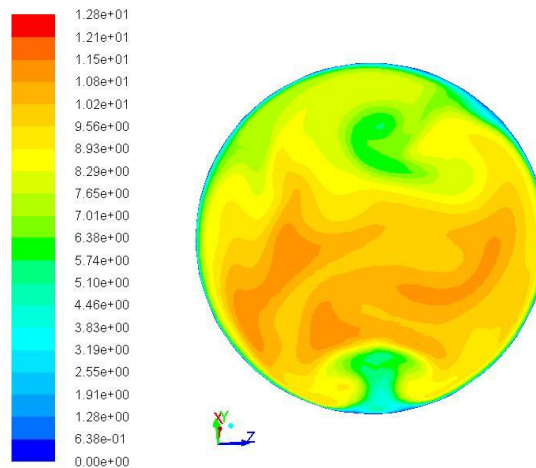


Figura 27. Velocidad instantánea sobre un plano a 45°.



Vemos como los contornos de velocidad tienen fluctuaciones en todos sus puntos respecto de los valores medios que se muestran más abajo. Esta es una de las características fundamentales de este modelo, su capacidad de poder mostrar los valores instantáneos del flujo. No obstante, dado que los resultados experimentales son presentados para valores medios, nos enfocaremos en visualizar los valores medios de cada sección; sin embargo, el campo de velocidades instantáneo cobrará mayor importancia en futuros estudios cuando el flujo tratado contenga partículas sólidas como es el caso del transporte neumático de polvos en la industria.

Al igual que las simulaciones anteriores se usó la misma estación de trabajo, del cual el tiempo requerido para realizar los cálculos de la simulación para este modelo fue de aproximadamente de 11 a 12 días, este tiempo es debido a la necesidad de realizar los cálculos dependientes del tiempo.

- **Coefficiente de presión**

El coeficiente de presión ya definido por la ecuación de la sección anterior, de la cual los contornos del coeficiente de presión C_p , están mostrados en las figuras 28 y 29, sobre el plano medio de la tubería $z = 0$ y a lo largo del codo, como en los casos de los modelos RANS.

Figura 28. Contornos de coeficiente de presión media en plano $z = 0$, para el modelo LES

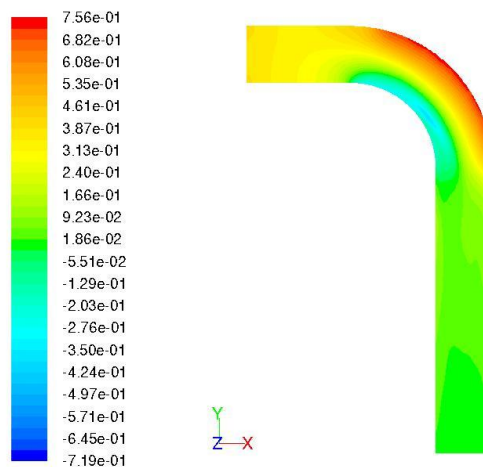
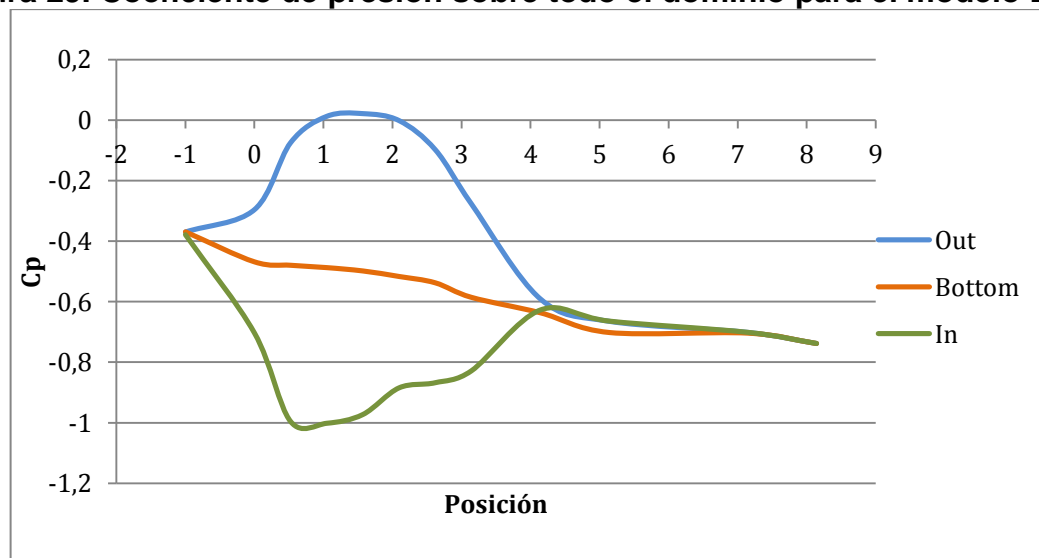


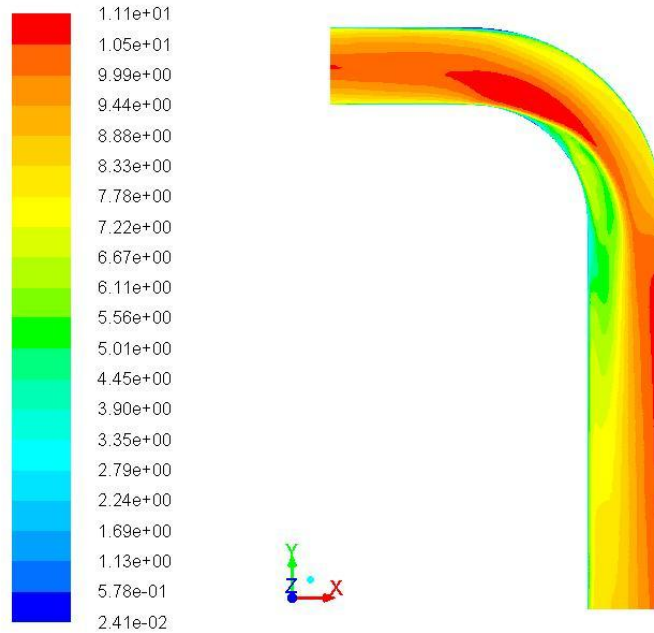
Figura 29. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para el modelo LES



- **Velocidades medias**

Los contornos de la velocidad media resultantes de la simulación para el plano medio, definido a $z = 0$, están dados por la figura 30.

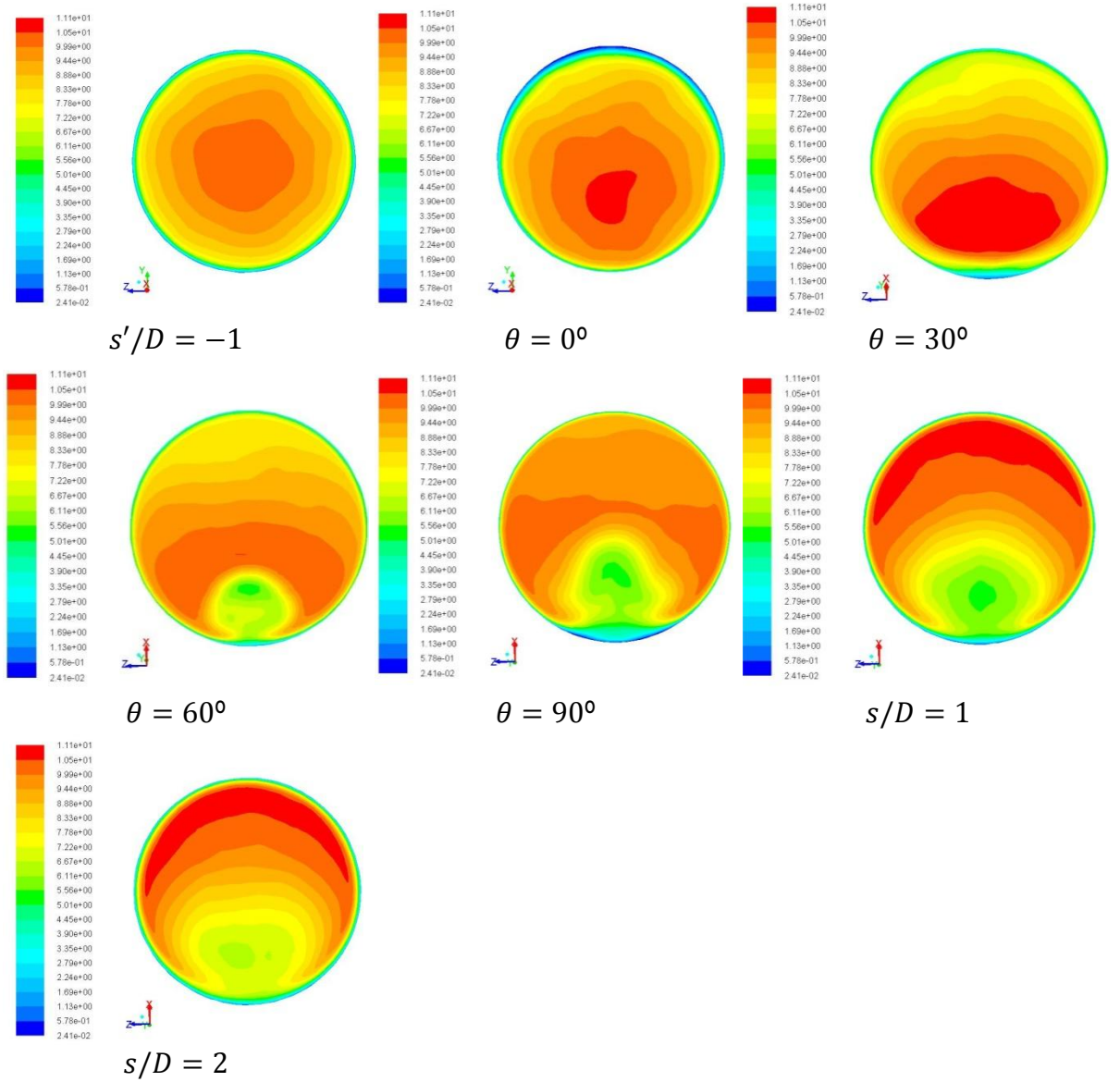
Figura 30. Contornos de velocidad media en plano $z = 0$, para el modelo LES



De esta grafica podemos observar que en la parte interna del codo a $\theta = 0^\circ$ el fluido empieza a acelerarse con una velocidad un poco mayor que en los modelos anteriores cercana a los 11.2m/s, cerca de la pared interior, debido a que hay un al gradiente de presión favorable, al igual vemos que el fluido cerca de la pared exterior empieza a disminuir su velocidad de acuerdo con el gradiente de presión adverso.

Es por esta razón que se empieza a formar flujo secundario al igual que los modelos anteriores, desde la pared exterior pasando hacia la pared interna sobre toda la sección transversal como se verá en la figura 31.

Figura 31. Contornos de velocidad media sobre diferentes planos del dominio, para el modelo LES



En los contornos de velocidad se puede apreciar una cierta fluctuación, lo que nos indica que el tiempo total de promediado es todavía insuficiente. Por consiguiente, se necesita extender todavía más la duración de la simulación transitoria bajo LES, al menos hasta el doble del tiempo corrido hasta ahora (6 tiempos de residencia). No obstante el comportamiento cualitativo de los contornos de velocidad es muy similar al obtenido con los modelos RANS, aunque éstos no se pueden visualizar de forma tan definida como en las figuras anteriores.

- **Energía turbulenta**

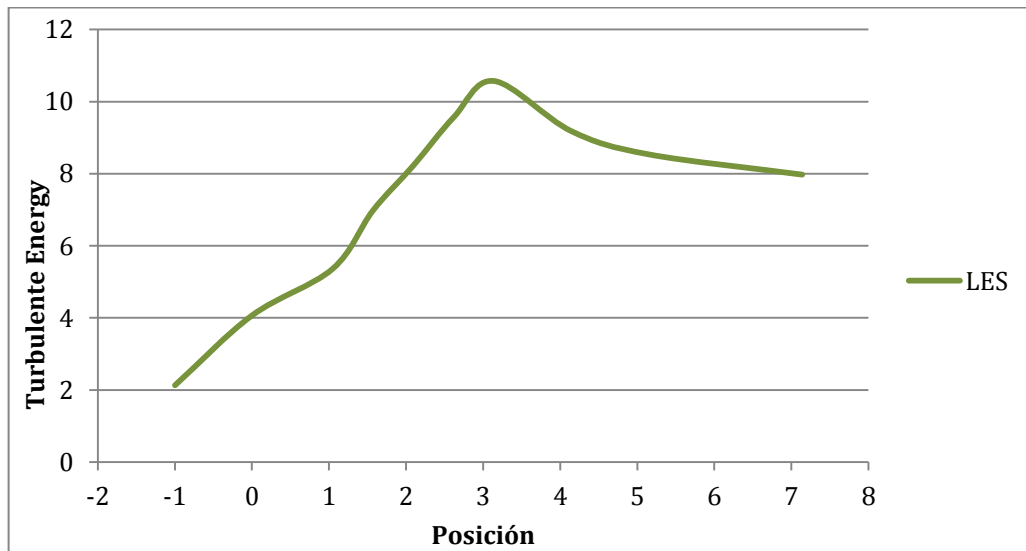
La energía cinética turbulenta que está dada por la siguiente ecuación

$$k = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \quad [34]$$

Sin embargo, es necesario destacar que la energía cinética fluctuante de la LES se obtiene respecto de los valores medios temporales y corresponde a la energía fluctuante de las escalas resueltas por el modelo, mientras que la energía cinética turbulenta proporcionada por los modelos estándar se obtiene como solución de las ecuaciones de evolución que modelan todo el rango de fluctuaciones turbulentas, por lo que no son exactamente la misma variable. Aún con todo se compararán entre sí y también con los datos experimentales en la sección siguiente.

Se calculó para cada sección transversal sobre la tubería, tanto valores antes del codo como después de este, en la cual se muestra en la figura 32.

Figura 32. Energía cinética turbulenta en diferentes planos para el modelo LES



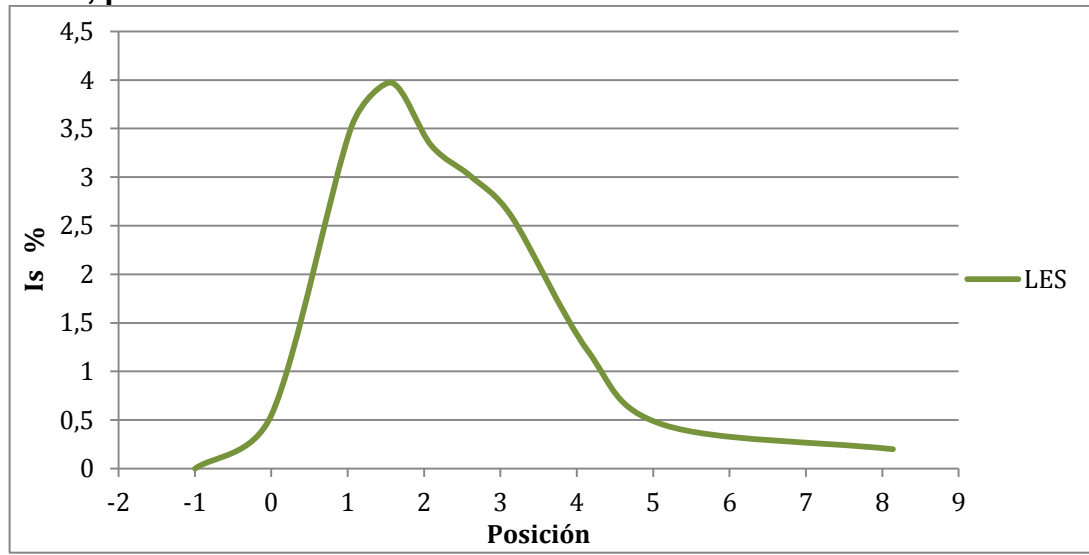
- **Intensidad de flujo secundario**

Intensidad de flujo secundario dada por la siguiente expresión

$$I_s = \frac{4}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) r dr d\theta \quad [35]$$

Esta fue calculada cada sección para la cual tenemos los siguientes resultados, mostrados en la figura 33.

Figura 33. Intensidad de flujo secundario para diferentes planos sobre el dominio, para el modelo LES

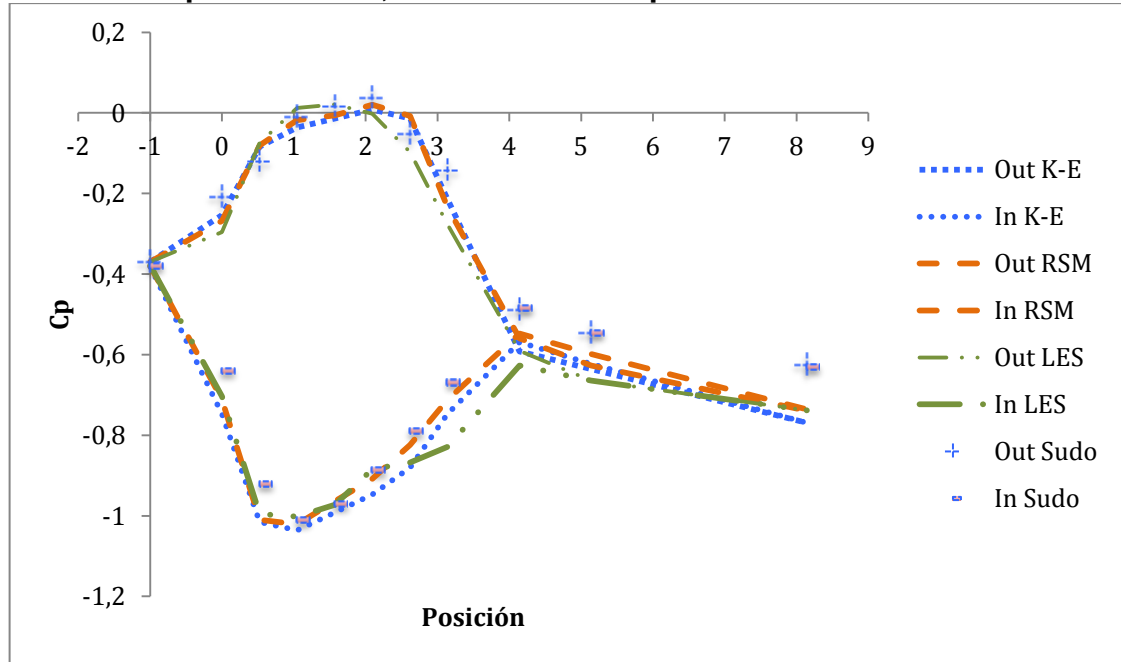


Observando la grafica, el flujo secundario presenta un máximo desplazado hacia la parte interna del codo, entre 45° y 50° , presentando una forma similar a la obtenida con los modelos de turbulencia RANS. Después del máximo, a diferencia de lo que sucedía con los modelos RANS, esta variable decrece continuamente. La influencia del flujo secundario es apreciable aún más allá de 4 veces el diámetro

4.6.4 Comparación de resultados. Dada la metodología de este trabajo, se comparan los resultados de las simulaciones con los resultados experimentales de Sudo et al. (1998) en las gráficas siguientes.

- Coeficiente de presión (figura 34)

Figura 34. Coeficiente de presión sobre todo el dominio para los tres modelos computacionales, con los datos experimentales de Sudo et al.



Vemos de los resultados, que el coeficiente de presión de los modelos de turbulencia tratados en este trabajo, son muy semejantes a los valores dados por Sudo, tenemos muy pocas diferencias dentro del codo, aunque saliendo de este, el coeficiente de presión presenta una mayor pendiente en los resultados numéricos que en los experimentales, hecho que puede explicarse al observar que la longitud del tramo de tubería detrás del codo no es suficientemente larga. Los datos puntuales sobre cada plano y su respectivo error se encuentran en las tablas 1, 2, y 3.

Tabla 1. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo $k - \epsilon$, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error

Posición	Out K-E	In K-E	Out Sudo	In Sudo	Error Rel. Out	Error Rel. In
-1	-0,370	-0,382	-0,370	-0,379	0%	0%
0	-0,254	-0,747	-0,209	-0,640	5%	11%
0,5235	-0,084	-1,016	-0,120	-0,920	4%	10%
1,0471	-0,037	-1,036	-0,009	-1,010	3%	3%
1,57	-0,014	-0,991	0,016	-0,971	0%	2%
2,094	0,008	-0,947	0,038	-0,886	3%	6%

2,6179	-0,014	-0,880	-0,051	-0,790	4%	9%
3,1415	-0,214	-0,747	-0,142	-0,668	7%	8%
4,1415	-0,592	-0,569	-0,488	-0,483	10%	9%
5,1415	-0,636	-0,623	-0,545	-0,545	9%	8%
8,1415	-0,769	-0,769	-0,626	-0,630	14%	14%

Tabla 2. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo RSM, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error

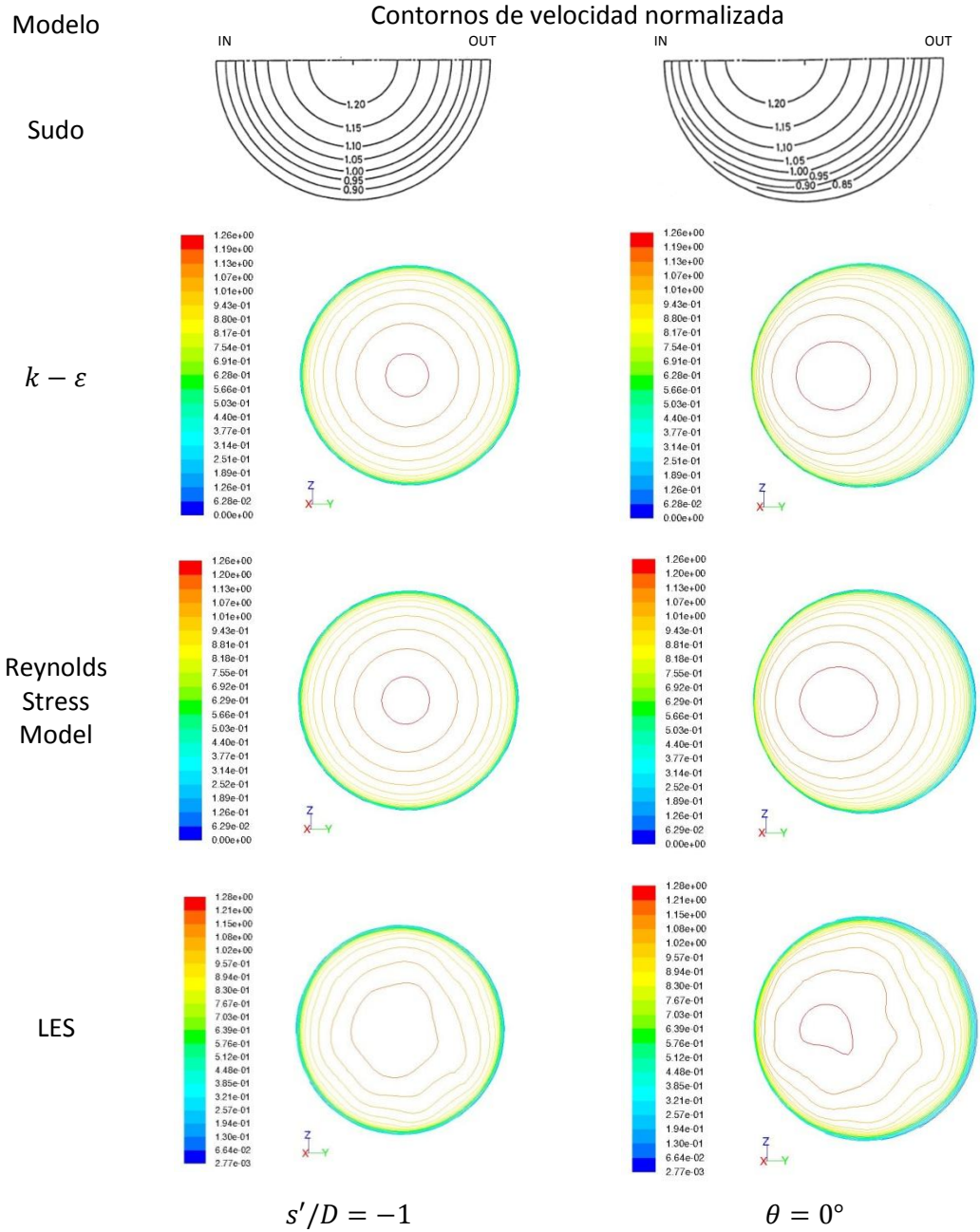
Posición	Out RSM	In RSM	Out Sudo	In Sudo	Error Rel. Out	Error Rel. In
-1	-0,370	-0,380	-0,370	-0,379	0%	0%
0	-0,268	-0,711	-0,209	-0,640	6%	7%
0,5235	-0,081	-1,010	-0,120	-0,920	4%	9%
1,0471	-0,018	-1,021	-0,009	-1,010	1%	1%
1,57	-0,006	-0,964	0,016	-0,971	1%	1%
2,094	0,020	-0,908	0,038	-0,886	2%	2%
2,6179	-0,008	-0,824	-0,051	-0,790	4%	3%
3,1415	-0,234	-0,712	-0,142	-0,668	9%	4%
4,1415	-0,560	-0,548	-0,488	-0,483	7%	6%
5,1415	-0,627	-0,599	-0,545	-0,545	8%	5%
8,1415	-0,739	-0,736	-0,626	-0,630	11%	11%

Tabla 3. Datos de coeficiente de presión obtenidos del modelo LES, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error

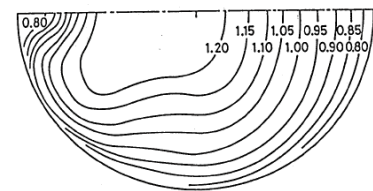
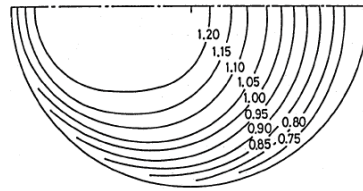
Posición	Out LES	In LES	Out Sudo	In Sudo	Error Rel. Out	Error Rel. In
-1	-0,370	-0,379	-0,370	-0,379	0%	0%
0	-0,296	-0,704	-0,209	-0,640	9%	6%
0,5235	-0,074	-0,996	-0,120	-0,920	5%	8%
1,0471	0,012	-1,002	-0,009	-1,010	0%	1%
1,57	0,021	-0,973	0,016	-0,971	0%	0%
2,094	-0,002	-0,885	0,038	-0,886	4%	0%
2,6179	-0,098	-0,868	-0,051	-0,790	5%	8%
3,1415	-0,277	-0,828	-0,142	-0,668	13%	16%
4,1415	-0,591	-0,627	-0,488	-0,483	10%	14%
5,1415	-0,665	-0,664	-0,545	-0,545	12%	12%
8,1415	-0,738	-0,738	-0,626	-0,630	11%	11%

- Contornos de velocidad (figura 35)

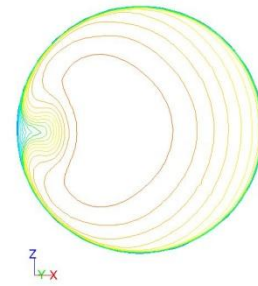
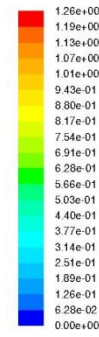
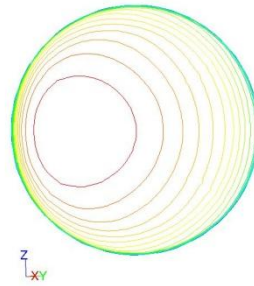
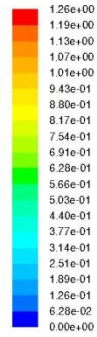
Figura 35. Diferentes contornos de velocidad media normalizados.



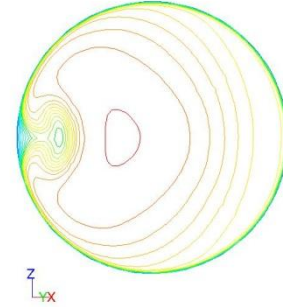
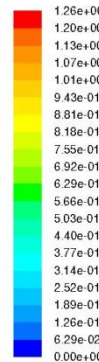
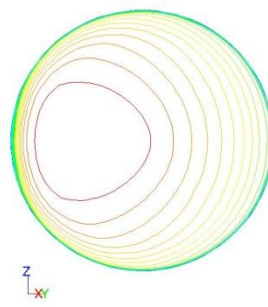
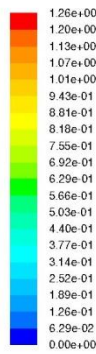
Sudo



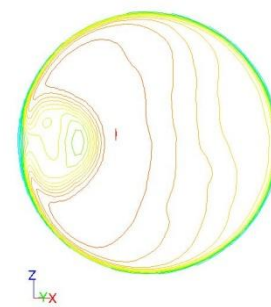
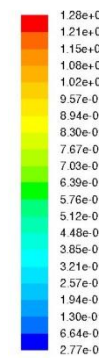
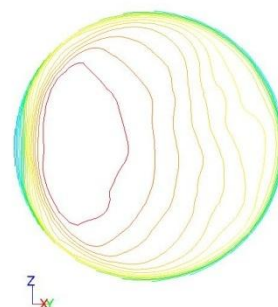
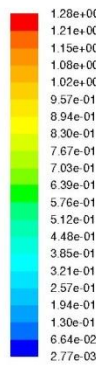
$k - \varepsilon$



Reynolds
Stress
Model



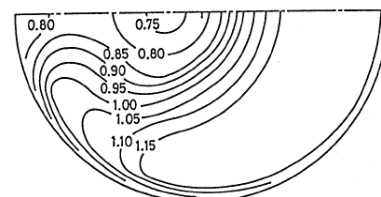
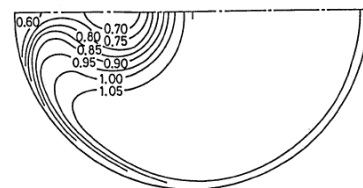
LES

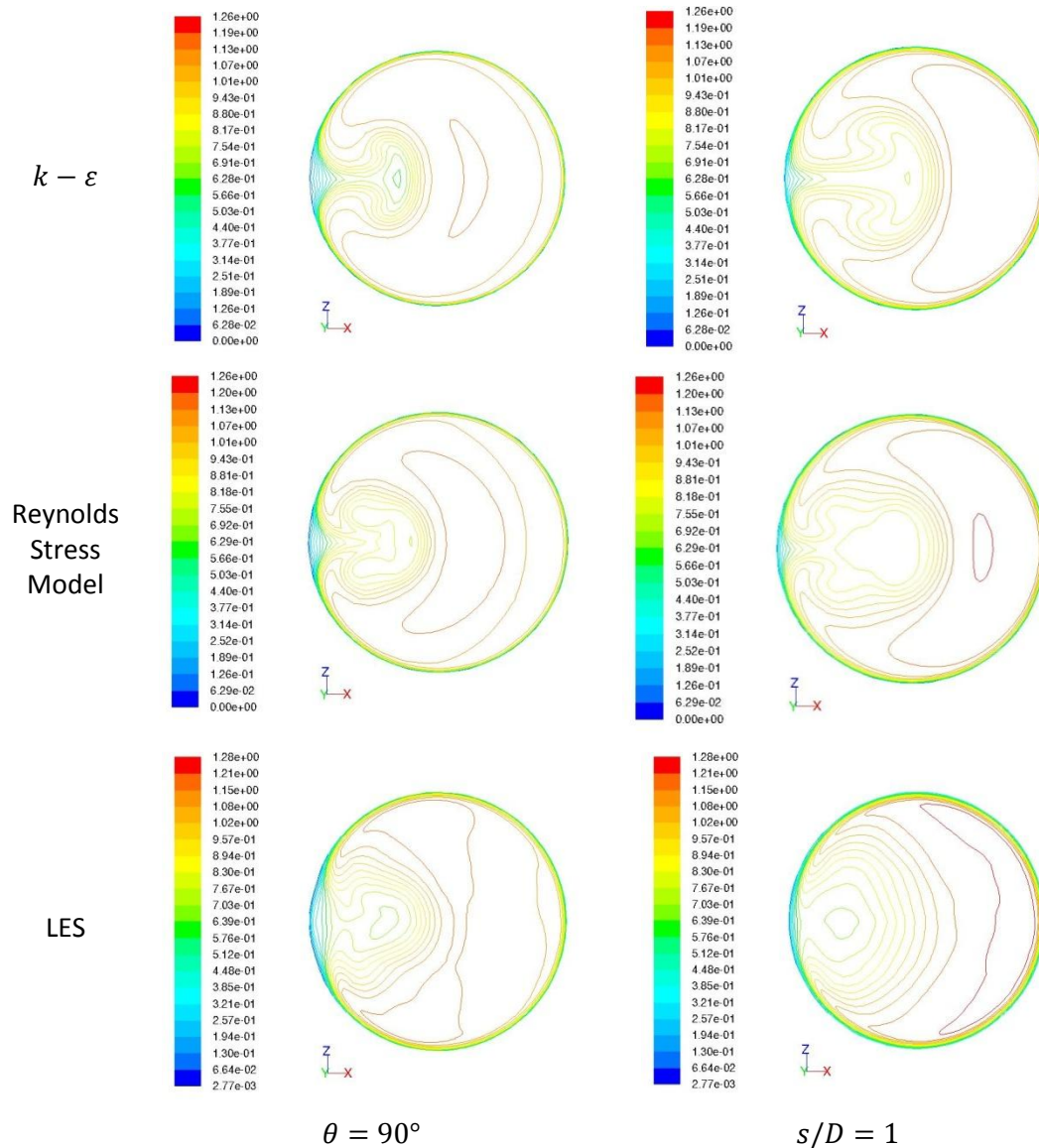


$\theta = 30^\circ$

$\theta = 60^\circ$

Sudo



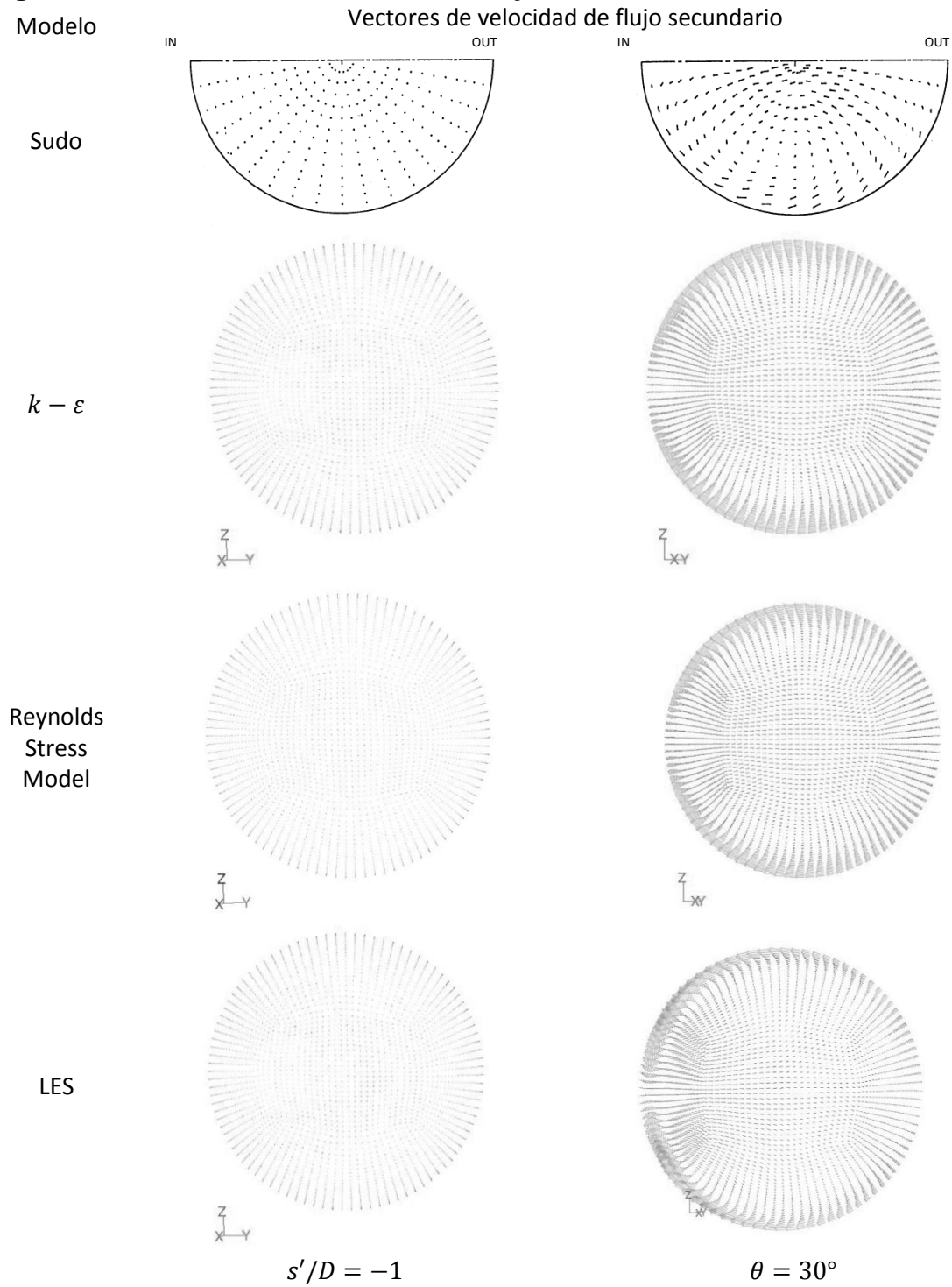


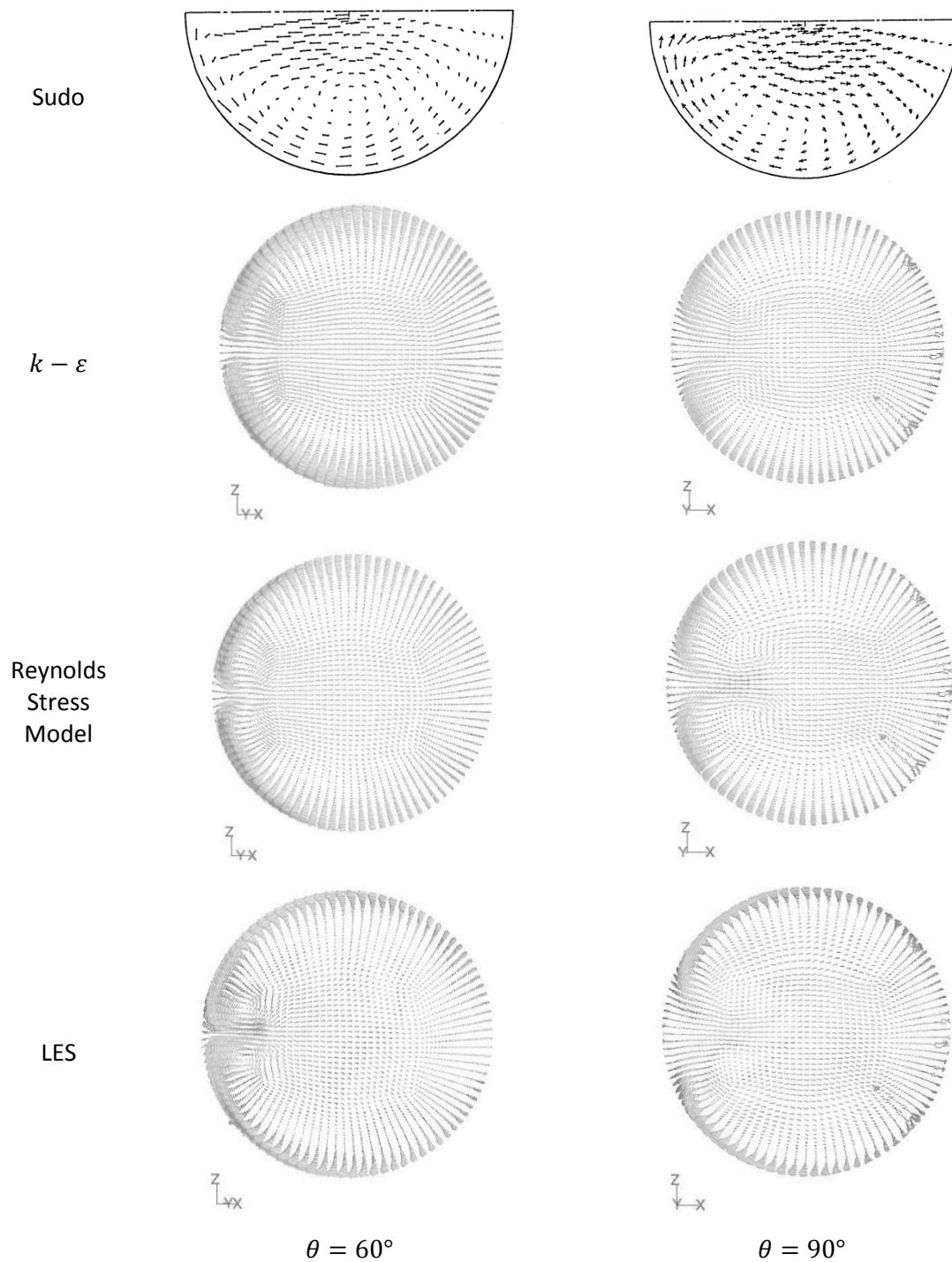
Vemos que los contornos de velocidad de los modelos $k - \varepsilon$ y RSM son muy parecidos a los resultados experimentales mostrados por Sudo, eso quiere decir que la simulación proporciona valores muy certeros comparados con los datos experimentales. En los resultados de la LES, aunque sus contornos de velocidad no son tan apreciables comparados con los de Sudo, se puede notar el crecimiento del flujo secundario a medida que pasamos los diferentes ángulos del codo, es decir que aunque no son iguales, este tiende a los valores de Sudo. Se espera que esta situación mejore al considerar mayor tiempo real de la simulación LES.

- **Vectores de velocidad de flujo secundario (figura 36)**

Ahora compararemos los vectores de velocidad de flujo secundario

Figura 36. Vectores de velocidad de flujo secundario.



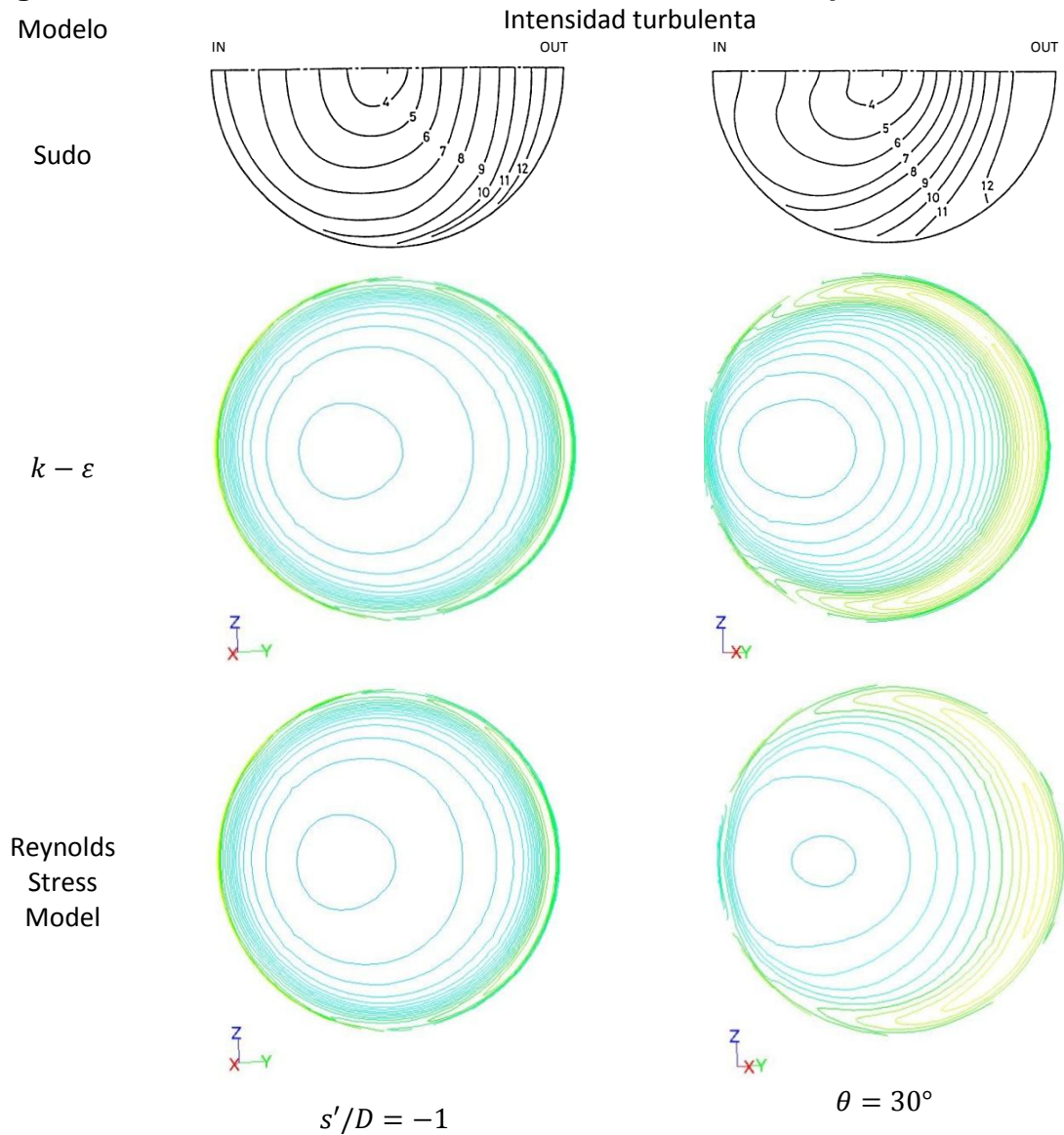


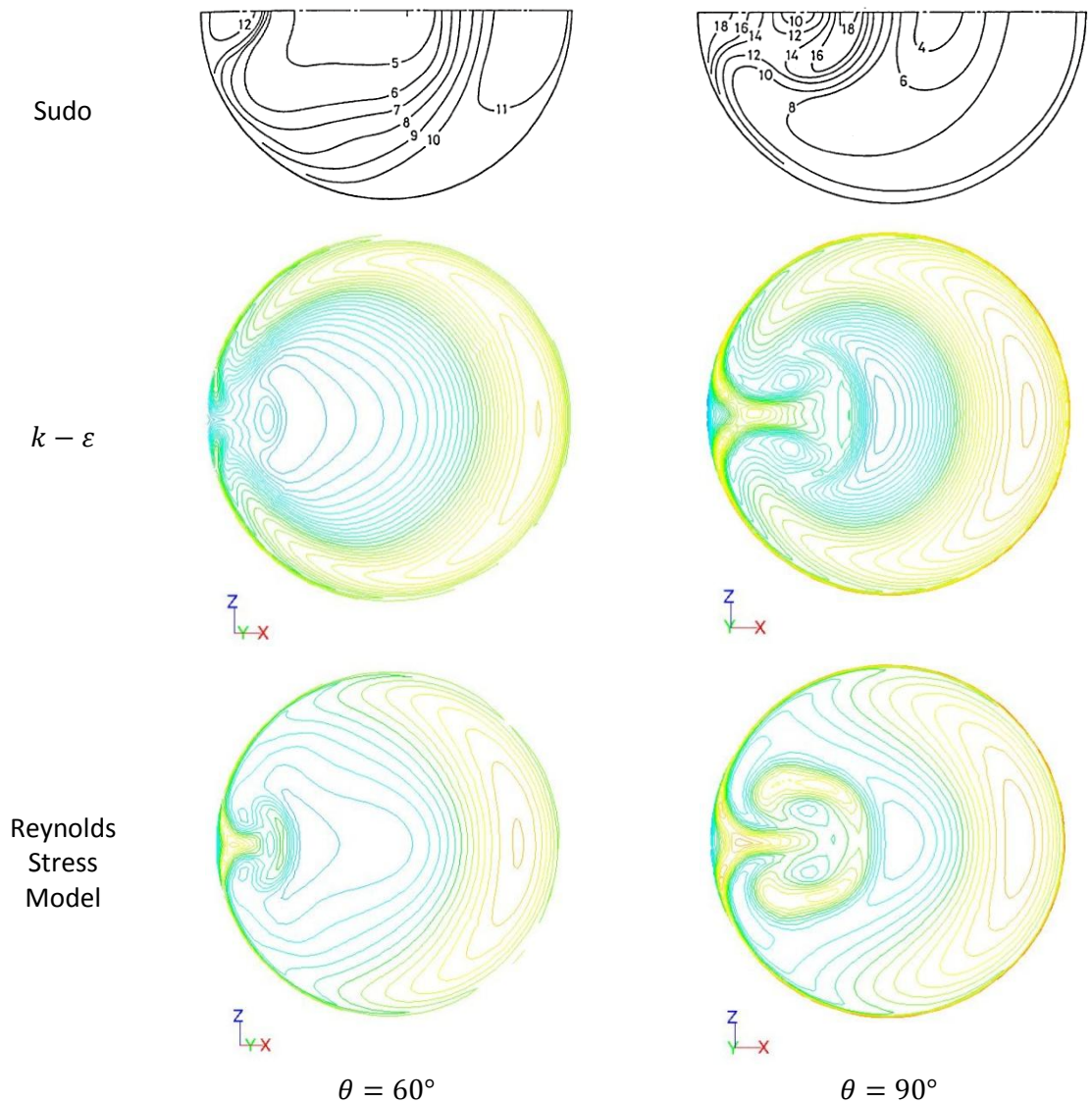
Como podemos ver los vectores de velocidad de flujo secundario si son todos muy parecidos, en donde se forman las recirculación en los mismo lugares que dado por los resultados experimentales, lo cual nos dice que los modelos tratados en este estudio, si tienen valores parecidos a los obtenidos por los datos experimentales de Sudo.

- **Intensidad Turbulenta**

Ahora veremos los diferentes contornos dados por las simulaciones, y por los valores experimentales mostrados por Sudo, para los diferentes ángulos tratados anteriormente, donde tomaremos en cuenta solo los plano para el codo (figura 36)

Figura 37. Intensidad Turbulenta mostrando los datos experimentales





Como podemos observar en los contornos de intensidad turbulenta, los valores de las simulaciones de los modelos $k - \varepsilon$ y de los esfuerzos de Reynolds, son muy parecidos a los valores experimentales dados por Sudo, con lo cual con esta relación, los modelos realizados son aun más certeros con respecto a los experimentales.

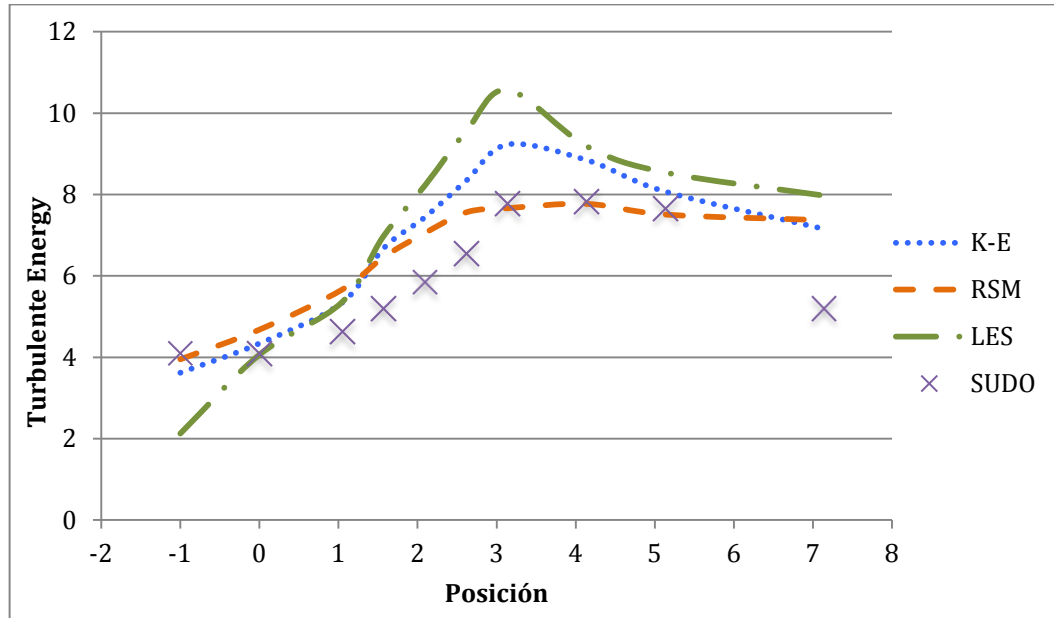
- **Energía Cinética Turbulenta**

Esta energía es calculada para los diferentes contornos de dominio de importancia, donde está dada por la siguiente expresión.

$$k = \frac{1}{2} (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \quad [34]$$

Tenemos los diferentes valores para los tres modelos estudiados mostrados en la figura 38.

Figura 38. Energía turbulenta, con los tres modelos tratados y los datos experimentales de Sudo



De las graficas podemos observar que los valores dados por Sudo, la energía cinética va en aumento pasando por el inicio del codo hasta alcanzar a 90° el valor pico, de igual forma para los tres modelos usados en la simulación, donde la energía turbulenta también va en aumento alcanzando un valor pico cercano a 90°. Lo interesante de estas graficas es que para el modelo LES la energía cinética turbulenta es menor a todos los modelos antes del codo, pero alcanza un valor a 90° donde es el más alto de los tres modelos; en el modelo RSM alcanza un valor pico, pero su decremento es menos marcado que en los demás modelos. Es de destacar que el modelo RSM captura los valores máximos de la energía fluctuante a la salida del codo, la siguiente tabla muestra los valores puntuales y su respectivo error (tabla 4).

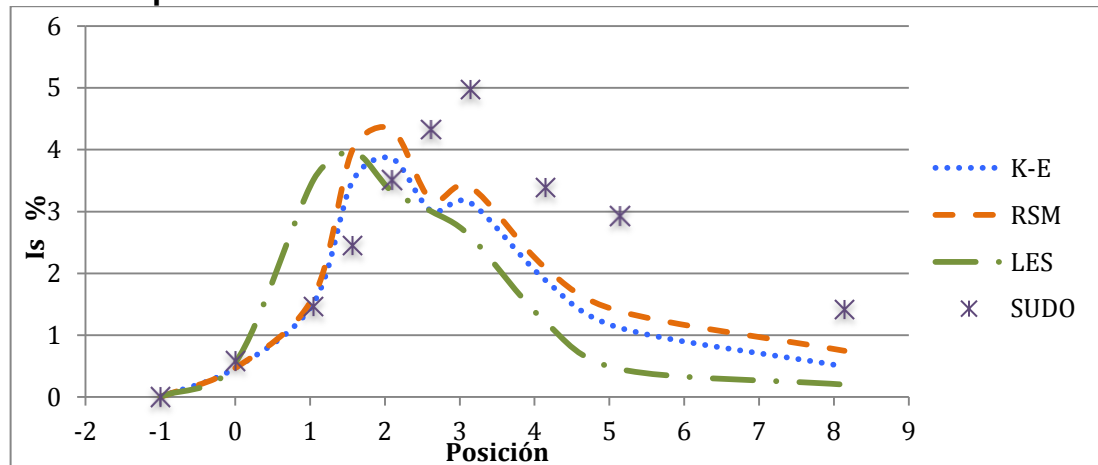
Tabla 4. Datos de energía cinética turbulenta obtenidos de los modelos, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error.

Posición	K-E	RSM	LES	SUDO	Error K-E	Error RSM	Error LES
-1	3,621	3,953	2,130	4,094	0	0	0
0	4,341	4,681	4,066	4,094	6%	14%	1%
1,0471	5,344	5,666	5,362	4,620	16%	23%	16%
1,57	6,677	6,461	6,979	5,200	28%	24%	34%
2,094	7,443	7,054	8,225	5,848	27%	21%	41%
2,6179	8,343	7,565	9,566	6,550	27%	15%	46%
3,1415	9,229	7,665	10,571	7,778	19%	1%	36%
4,1415	8,843	7,770	9,184	7,836	13%	1%	17%
5,1415	8,066	7,508	8,539	7,661	5%	2%	11%
7,1415	7,152	7,370	7,974	5,201	38%	42%	53%

- **Intensidad de flujo secundario**

Para la intensidad de flujo secundario se usa la misma expresión presentada anteriormente, tomando los valores para todo el dominio simulado. La figura 38 muestra los diferentes valores dados por la simulación, con los valores experimentales de Sudo.

Figura 39. Intensidad del flujo secundario, con los tres modelos tratados y los datos experimentales de Sudo



Como podemos observar de la figura los valores obtenidos de los diferentes modelos tienen una tendencia muy parecida al de los resultados experimentales,

en donde empiezan con una cantidad nula, y va en crecimiento a medida que el fluido avanza por el codo, en donde para los modelos $k - \varepsilon$ y RSM alcanzan su valor pico cercano a los 60°, mientras que el modelo LES alcanza sus valores picos cerca de 50°, la siguiente tabla muestra los valores puntuales y su respectivo error (tabla 5).

Tabla 5. Datos de flujo secundario obtenidos de los modelos, junto con los datos experimentales de Sudo y su Error.

Posición	K-E	RSM	LES	SUDO	Error K-E	Error RSM	Error LES
-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0,467	0,468	0,551	0,585	20%	20%	6%
1,0471	1,519	1,627	3,515	1,462	4%	11%	140%
1,57	3,495	4,006	3,973	2,450	43%	64%	62%
2,094	3,855	4,335	3,326	3,509	10%	24%	5%
2,6179	3,010	3,190	3,005	4,327	30%	26%	31%
3,1415	3,139	3,399	2,600	4,971	37%	32%	48%
4,1415	1,892	2,094	1,216	3,392	44%	38%	64%
5,1415	1,116	1,386	0,450	2,924	62%	53%	85%
8,1415	0,492	0,747	0,199	1,421	65%	47%	86%

Dado los resultados anteriores, podemos observar que los tres modelos de turbulencia pudieron simular correctamente las características del flujo dentro del codo, incluyendo la formación del flujo secundario en esta sección de la tubería. Los contornos de velocidad y la intensidad turbulenta obtenidos con los modelos RANS dan valores muy aproximados a los mostrados por Sudo. La intensidad de flujo secundario presenta características muy similares, afectando el flujo bien aguas abajo del codo. La intensidad turbulenta presenta también similares contornos para los modelos convencionales.

La simulación del modelo LES, debido al limitado tiempo de promediado, no presenta tan buenas comparaciones con los datos experimentales como los modelos RANS, pero sí reproduce bien cualitativamente la tendencia. Las mejoras de los resultados de la simulación LES pasan necesariamente por tener simulaciones más largas para obtener valores medios más establecidos en las simulaciones transitorias.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado la simulación numérica tridimensional del flujo turbulento de aire en un codo de tubería de sección circular de radio de curvatura igual a 4 (radio de curvatura del codo sobre radio de la tubería). El número de Reynolds basado en el diámetro de la tubería es de 60000, de acuerdo con los datos experimentales considerados para validación de las simulaciones (Sudo et al., 1998), por lo que el carácter del flujo es marcadamente turbulento. En consecuencia se han utilizado modelos de turbulencia para su descripción: el modelo $k - \varepsilon$ estándar (de dos ecuaciones), el modelo Reynolds Stress RSM (de siete ecuaciones) y la Simulación de Grandes Escalas (LES). Los dos primeros se corrieron en estado estacionario mientras que la LES se llevó a cabo en estado transitorio. Los resultados obtenidos con los tres modelos de turbulencia se compararon con los datos experimentales proporcionados en Sudo et al. (1998), basados en anemometría de hilo caliente.

En general, los resultados obtenidos con los tres modelos de turbulencia son suficientemente similares entre sí a excepción de la energía cinética turbulenta a lo largo del codo, donde los resultados promedio obtenidos de la LES son superiores a los obtenidos con los modelos de turbulencia estacionarios ($k - \varepsilon$ y RSM) y también están por encima de los puntos experimentales. Es necesario destacar que la energía cinética fluctuante de la LES se obtiene respecto de los valores medios temporales y corresponde a la energía fluctuante de las escalas resueltas por el modelo, mientras que la energía cinética turbulenta proporcionada por los modelos estándar se obtiene como solución de las ecuaciones de evolución que modelan todo el rango de fluctuaciones turbulentas, por lo que no son exactamente la misma variable. Es de destacar que en esta variable el modelo RSM es capaz de reproducir los valores máximos a la salida del codo. Respecto a la intensidad de flujo secundario, se encuentra que los tres modelos de turbulencia predicen el máximo en el interior del codo a diferencia de las medidas experimentales que muestran su máximo en la salida. Dichas diferencias son debidas a la longitud relativamente corta del tramo de tubería después del codo.

Los coeficientes de presión a lo largo del codo obtenidos en la simulación son muy cercanos entre sí y también muy parecidos a los puntos experimentales, por lo que las simulaciones numéricas constituyen una herramienta apropiada para obtener las pérdidas de carga en este tipo de elementos de tubería. No obstante, se encontró que la pendiente de la caída de presión aguas abajo del codo es mayor en los resultados numéricos que en los puntos experimentales, hecho que puede explicarse al observar que la longitud del tramo de tubería detrás del codo no es suficientemente larga (cinco diámetros en las simulaciones frente a cuarenta en el

experimento). Recordemos que dicha longitud se tomó como consecuencia de la cantidad de elementos necesarios para realizar la simulación transitoria con LES. Las diferencias observadas entre LES y los modelos de turbulencia estándar se debe a la necesidad de tener simulaciones más largas para obtener valores medios más establecidos en las simulaciones transitorias. Por consiguiente es necesario al menos duplicar la duración de las simulaciones en tiempo real y evaluar su influencia en los valores promedio de las variables del gas, tarea que ya se está realizando.

Como trabajo futuro está la inclusión de partículas sólidas en este flujo bajo el esquema LES con el objeto de investigar los mecanismos de interacción fluido-partículas. En particular, debido a la respuesta de las partículas a las estructuras de flujo instantáneas en lugar de a las estructuras promedio, se espera poder visualizar la fluctuación lateral de la concentración de partículas encontrada en algunos experimentos.

BIBLIOGRAFIA

Breuer M., Baytekin H.T., Matida E.A. *Prediction of aerosol deposition in 90° bends using LES and an efficient Lagrangian tracking method*. Journal of Aerosol Science 37: 1407-1428, 2006.

Crane, *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*. Ed. McGraw-Hill.
Cuming H. G.. *The Secondary Flow in Curved Pipes*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda.1952.

Dean W.R, *Streamline Motion of fluid in curved pipes*. Phil. Mag. (7), Vol. 4: 08,1927.

Eustace J, Experiments on streamline motion in curved pipes. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 85: 122 fl. 1911.

Jitchote W., Robertson A. M. *Flow of second order fluids in curved pipes*. Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics 90: 91-116, 2000.
Lain Beatove Santiago, *Modelado y Simulación de flujos inducidos por burbujas*. Ed. Universidad Autónoma de Occidente Cali (Colombia), 2007.

Laín Beatove Santiago, Sommerfeld Martin. *Euler/Lagrange Computations of Particle-Laden Gas Flow in Pneumatic Conveying Systems*. 7th International Conference on Multiphase Flow, 2010.

Mataix C., *Mecánica de fluidos y maquinas hidráulicas*. Segunda edición, ed. Alfaomega, 1982.

Mohanarangam K., Tian Z.F., Tu J.Y. *Numerical simulation of turbulent gas-particle flow in a 90° bend: Eulerian -Eulerian approach*. Computers and Chemical Engineering 32: 561-571, 2008.

Patankar S. V., Pratap v. S.; Spalding d. B. *Prediction of turbulent flow in curved pipes*. Journal of Fluids Mechanics 67: 583-595,1975.

Pope S. B., *Turbulent Flows*. Cambridge University Press. 2000.

Pruvost J, Legrand J, Legentilhomme P. *Numerical investigation of bend and torus flows, part I: effect of swirl motion on flow structure in U-bend*. Chemical Engineering Science 5: 3345-3357, 2004.

Rudman M., Blackburn H. M. *Large Eddy Simulation of Turbulent Pipe Flow*. Second International conference on CFD in the Minerals and Process Industries, 1999.

Sudo K., Sumida M., Hibara H.. *Experimental investigation on turbulent flow in a circular-sectioned 90-degree bend*. Experiments in Fluids 25: 42-49, 1998.

Taylor G. I., *The Criterion for Turbulence in curved pipes*. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 124: 243-249. 1929.

Tennekes H., Lumley J. L. *A first Course in Turbulence*. MIT Press. 1972.

White C. M., *Streamline flow through curved pipes*. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 123: 645-663, 1929.

White F. *Mecánica de fluidos*. Quinta edición, ed. Mac Graw Hill, 2004